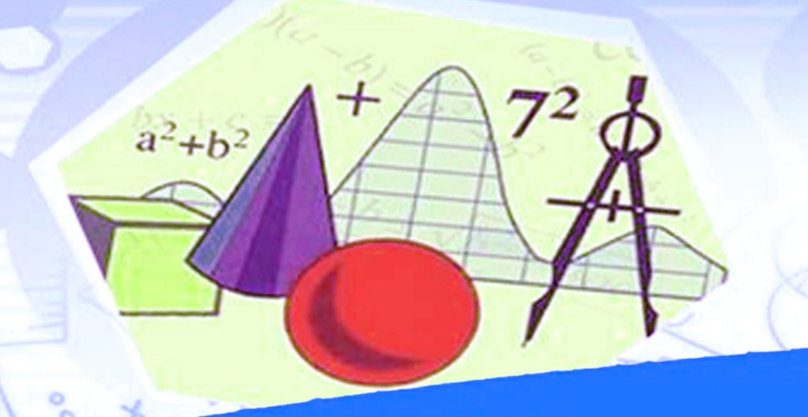
NEW

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PT LƯỢNG GIÁC

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT



ÔN THI THPT QUỐC GIA

HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A – LÝ THUYẾT CHUNG

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NẮM VỮNG

I. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

❶ $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\begin{cases}\sin^2 x=1-\cos^2 x\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{cases}$

❷ $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\Rightarrow\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

❸ $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x\Rightarrow\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$

❹ $\tan x.\cot x=1\Rightarrow\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$

❺ $\begin{cases}\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x\\ \sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x\end{cases}$

❻ $\begin{cases}\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)\\ \sin^3 x-\cos^3 x=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)\end{cases}$

II. DẤU CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

	Góc I	Góc II	Góc III	Góc IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\cot x$	+	–	+	–

III. MỐI QUAN HỆ CỦA CÁC CUNG LƯỢNG GIÁC ĐẶC BIỆT

❶ **Hai cung đối nhau**

$\cos(-x)=\cos x$ $\quad$ $\sin(-x)=-\sin x$

$\tan(-x)=-\tan x$ $\quad$ $\cot(-x)=-\cot x$

❷ **Hai cung bù nhau**

$\sin(\pi-x)=\sin x$ $\quad$ $\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\tan(\pi-x)=-\tan x$ $\quad$ $\cot(\pi-x)=-\cot x$

❸ **Hai cung phụ nhau**

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ $\quad$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$ $\quad$ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$

❹ **Hai cung hơn nhau π**

$\sin(\pi+x)=-\sin x$ $\quad$ $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\tan(\pi+x)=\tan x$ $\quad$ $\cot(\pi+x)=\cot x$

❺ **Hai cung hơn nhau $\dfrac{\pi}{2}$**

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ $\quad$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$

❻ **Với *k* là số nguyên thì ta có:**

$\sin(x+k2\pi)=\sin x$ $\cos(x+k2\pi)=\cos x$

$\tan(x+k\pi)=\tan x$ $\cot(x+k\pi)=\cot x$

IV. CÔNG THỨC CỘNG

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$	$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$	$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

Đặc biệt:

TH1: Công thức góc nhân đôi: $\begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x\\ \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{cases}$

Hệ quả: Công thức hạ bậc 2: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

TH2: Công thức góc nhân ba: $\begin{cases}\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\\ \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\end{cases}$

V. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG SANG TÍCH VÀ TÍCH SANG TỔNG

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$
$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$
$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$
$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$	$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$

Chú ý:

- $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

❶ $\sin u=\sin v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v+2k\pi\\ u=\pi-v+k2\pi\end{array}\right.$	❷ $\cos u=\cos v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v+k2\pi\\ u=-v+k2\pi\end{array}\right.$
❸ $\tan u=\tan v\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+k\pi\\ u\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$	❹ $\cot u=\cot v\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+k\pi\\ u\neq k\pi\end{cases}$

Đặc biệt:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

Chú ý:

❖ Điều kiện có nghiệm của phương trình $\sin x = m$ và $\cos x = m$ là: $\boxed{-1 \le m \le 1}$

❖ Sử dụng thành thạo câu thần chú "***Cos đối – Sin bù – Phụ chéo***" để đưa các phương trình dạng sau về phương trình cơ bản:

$$\boxed{\sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} \qquad \boxed{\cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)}$$

$$\boxed{\sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)} \qquad \boxed{\cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)}$$

❖ Đối với phương trình $\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 1\\ \sin^2 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \pm 1\\ \sin x = \pm 1\end{array}\right.$ không nên giải trực tiếp vì khi đó phải giải 4 phương trình cơ bản thành phần, khi đó việc kết hợp nghiệm sẽ rất khó khăn. Ta nên dựa vào công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ để biến đổi như sau: $\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 1\\ \sin^2 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0$

❖ Tương tự đối với phương trình $\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = \frac{1}{2}\\ \sin^2 x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos^2 x - 1 = 0\\ 1 - 2\sin^2 x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số sin

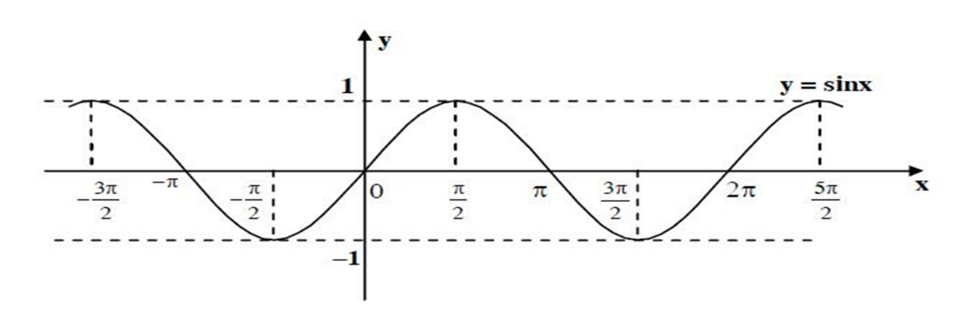
Hàm số $y = \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ nhận giá trị trên $[-1;1]$ và:

- Là hàm số lẻ vì $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π

Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt

- $\sin x = 0$ khi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = -1$ khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \sin x$:



2. Hàm số côsin

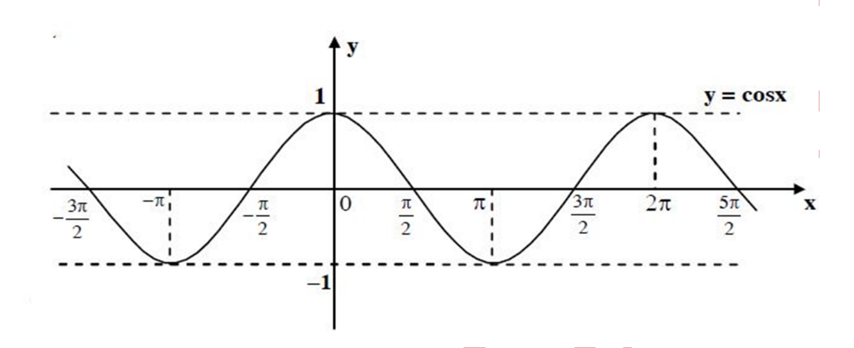
Hàm số $y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $[-1;1]$ và:

- Là hàm số chẵn vì $\cos(-x)=\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π

Hàm số $y=\cos x$ nhận các giá trị đặc biệt:

- $\cos x=0$ khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- $\cos x=1$ khi $x=k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- $\cos x=-1$ khi $x=-\pi+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y=\cos x$:



3. Hàm số tang

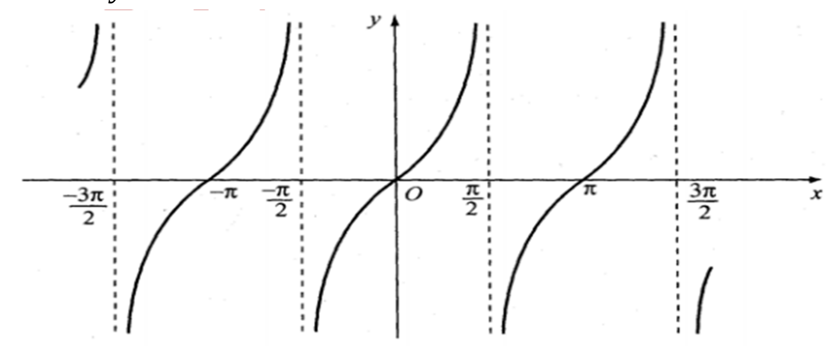
Hàm số $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và:

- Là hàm số lẻ vì $\tan(-x)=-\tan x$, $\forall x\in\mathbb{R}/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π

Hàm số $y=\tan x$ nhận giá trị đặc biệt

- $\tan x=0$ khi $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- $\tan x=1$ khi $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- $\tan x=-1$ khi $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y=\tan x$:



4. Hàm số cô tang

Hàm số $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và:

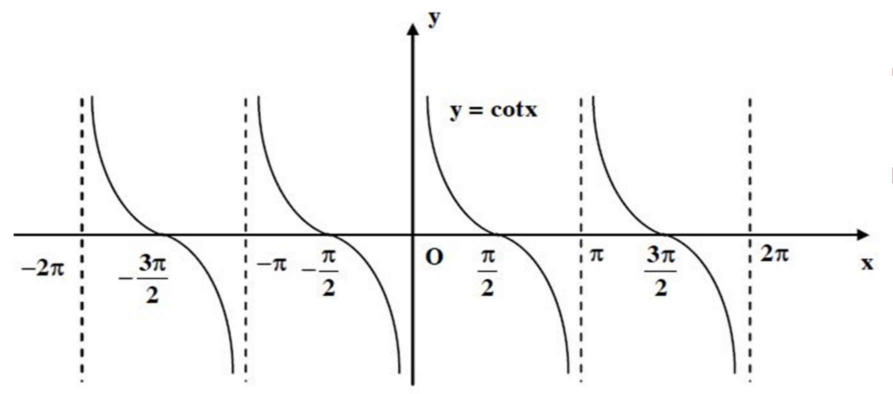
- Là hàm số lẻ vì: $\cot(-x)=-\cot x$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π

Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt

- $\cot x = 0$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot x = 1$ khi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot x = -1$ khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \cot x$:



MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VỚI SINX VÀ COSX

1. Phương trình $\sin x = a$ (1)

- $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm
- $|a| \le 1$: Gọi α là một cung sao cho $\sin\alpha = a$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha$ và (1) có các nghiệm $x = \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

- Khi $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ và $\sin\alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arcsin a$
- Phương trình $\sin x = \sin\beta^\circ$ có các nghiệm:
  $x = \beta^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ và $x = 180^\circ - \beta^\circ + 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$
- Trong một công thức nghiệm của phương trình lượng giác, hông dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

2. Phương trình $\cos x = a$ (1)

- $|a| < 1$: Phương trình (2) vô nghiệm
- $|a| \le 1$: Gọi α là một cung sao cho $\cos\alpha = a$. Khi đó $(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha$ vì (2) có các nghiệm : $x = \pm\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

- Khi $0 \le \alpha \le \pi$ và $\cos\alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$
- Phương trình $\cos x = \cos\beta^\circ$ có các nghiệm $x = \pm\beta^\circ + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Phương trình $\tan x = a$ (3)

- Phương trình (3) xác định khi $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, tồn tại cung α sao cho $\tan\alpha = a$. Khi đó $(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha$ và (3) có nghiệm $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý:

- Khi $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ và $\tan\alpha=a$ thì ta viết $\alpha=\arctan a$
- Phương trình $\tan x=\tan\beta^{\circ}$ có các nghiệm $x=\beta^{\circ}+k180^{\circ},\ k\in\mathbb{Z}$

4. Phương trình $\cot x=\alpha\ (4)$

- Phương trình (4) xác định khi $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- $\forall a\in\mathbb{R}$, tồn tại cung α sao cho $\cot\alpha=a$. Khi đó $(4)\Leftrightarrow\cot x=\cot\alpha$ và (4) có nghiệm $x=\alpha+k\pi$. $k\in\mathbb{Z}$

Chú ý:

- Khi $0<\alpha<\pi$ và $\cot\alpha=a$ thì ta viết $\alpha=\text{arc}\cot a$
- Phương trình $\cot x=\cot\beta^{\circ}$ có các nghiệm $x=\beta^{\circ}+k180^{\circ},\ k\in\mathbb{Z}$

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VỚI SINX VÀ COSX

Dạng phương trình: $\boxed{a\sin x+b\cos x=c}$

Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$

$\rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

C1: Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$. Khi đó $PT\Leftrightarrow\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\rightarrow x=?$

C2: Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$. Khi đó $PT\Leftrightarrow\cos(x-\beta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\rightarrow x=?$

Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2+b^2\geq c^2$

Chú ý: Khi phương trình có $|a|=|c|$ hoặc $|b|=|c|$ thì dùng công thức góc nhân đôi và sử dụng phép nhóm nhân tử chung.

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN BẬC HAI VỚI SINX VÀ COSX

Dạng phương trình: $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c.\cos^2x+d=0$

Cách giải:

Cách 1: + Xét $\cos x=0$ có là nghiệm phương trình không?

+ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2x$ ta được:

$$a\tan^2x+b\tan x+c+d\left(1+\tan^2x\right)=0\Rightarrow\tan x\Rightarrow x$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc đưa về phương trình bậc nhất với $\sin 2x$ và $\cos 2x$ (dạng 1)

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI SINX VÀ COSX

Dạng phương trình:

$a\sin^3x+b\cos^3x+c\sin^2x\cos x+d\cos^2x\sin x+e\sin x+f\cos x=0$

Cách giải:

+ Xét $\cos x=0$ có là nghiệm phương trình không?

+ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3x$ với chú ý: $\frac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x$

DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SINX VÀ COSX

Dạng phương trình:

$$f\left(\sin x\pm\cos x,\sin x\cos x\right)=0$$

Cách giải:

+ Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

+ Đặt $t=\sin x-\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$. Đưa về phương trình ẩn *t*.

Chú ý: Nếu $t=\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$ thì $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

DẠNG 6. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG THUẬN NGHỊCH

Dạng phương trình:

$$A\left(f^2(x)+\frac{k^2}{f^2(x)}\right)+B\left(f(x)+\frac{k}{f(x)}\right)+C=0, \text{ với } f(x)=\sin x, \cos x \quad (1)$$

hoặc $A\left(a^2\tan^2 x+b^2\cot^2 x\right)+B\left(a\tan x+b\cot x\right)+C=0$ (2).

Cách giải: ✧ Đối với phương trình (1): Đặt $t=f(x)+\frac{k}{f(x)}$

✧ Đối với phương trình (2): Đặt $t=a\tan x+b\cot x$

B – BÀI TẬP
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x+3}$ lần lượt là:

A. $m=-1;\ M=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-1;\ M=2$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2};\ M=1$. **D.** $m=1;\ M=2$.

Câu 2: Hàm số $y=\tan x+\cot x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. **B.** $\left(\pi+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

C. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$. **D.** $\left(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi\right)$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{5+2\cot^2 x-\sin x}+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$.

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Câu 5: Số giờ có ánh sáng của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left|\dfrac{\pi}{178}(t-60)\right|+10$, với $t\in Z$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?.

A. 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h=3\cos\left(\dfrac{\pi t}{7=8}+\dfrac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

Câu 7: Hàm số $y=4\cot^2 2x-\dfrac{\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{\tan x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. 0. **B.** $3-2\sqrt{3}$. **C.** $2-2\sqrt{2}$. **D.** -1.

Câu 8: Hàm số $y=2\cos x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $5-2\sqrt{2}$. **B.** $5+2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x$ là

A. $\dfrac{9}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}$ là

A. 0. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt[4]{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 11: Hàm số $y=\dfrac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 12: Cho hàm số $h(x)=\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x.\cos x}$ .Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi số thực x (trên toàn trục số) là

A. $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$. **B.** $0\le m\le\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}\le m\le 0$. **D.** $m\le\frac{1}{2}$.

Câu 13: Tìm m để hàm số $y=\dfrac{3x}{\sqrt{2\sin^2 x-m\sin x+1}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}]$. **B.** $m\in\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

C. $m\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right\}$.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2 x}$

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ T **B.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$

C. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$.

Câu 16: Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$y=\sqrt{1+\tan x.\tan y}+\sqrt{1+\tan y.\tan z}+\sqrt{1+\tan z.\tan x}$

A. $y_{\max}=1+2\sqrt{2}$. **B.** $y_{\max}=3\sqrt{3}$. **C.** $y_{\max}=\sqrt{4}$. **D.** $y_{\max}=2\sqrt{3}$.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 17: Hỏi trên đoạn $[-2017;2017]$, phương trình $(\sin x+1)\left(\sin x-\sqrt{2}\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 641. **D.** 642.

Câu 18: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

A. $\frac{\pi}{9}$. **B.** $-\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $-\frac{\pi}{9}$.

Câu 19: Tổng hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$ là:

A. $\frac{5\pi}{6}$, **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{7\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 20: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}+\sin^2 x$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

A. $T=\frac{7\pi}{8}$.   **B.** $T=\frac{21\pi}{8}$.   **C.** $T=\frac{11\pi}{4}$.   **D.** $T=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 21: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất x_0 của $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$.

A. $x_0=\frac{\pi}{2}$.   **B.** $x_0=\frac{\pi}{18}$.   **C.** $x_0=\frac{\pi}{24}$.   **D.** $x_0=\frac{\pi}{54}$.

Câu 22: Số nghiệm của phương trình $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 2.   **B.** 1.   **C.** 3.   **D.** 4.

Câu 23: Giải phương trình $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$.

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.   **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.   **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Câu 24: Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x+\sqrt{3}\cos 7x=\sin 7x+\sqrt{3}\cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(-\frac{\pi}{12};0\right)$.   **B.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{12}\right]$.   **C.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6}\right)$.   **D.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 25: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$.   **B.** $x_0\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$.   **C.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$.   **D.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 26: Gọi a,b lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\cos x-\sin 2x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}$, ta có:

A. $ab=0$.   **B.** $ab=\frac{11\pi^2}{6}$.   **C.** $ab=-\frac{11\pi^2}{6}$.   **D.** $ab=-\frac{\pi^2}{36}$.

Câu 27: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:

A. 2.   **B.** 4.   **C.** 6.   **D.** 8.

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sin^2 x}-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\left(\sqrt{3}+1\right)=0$ trên $(0;\pi)$ là?

A. 1.   **B.** 2.   **C.** 3.   **D.** 4.

Câu 29: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0$ trên đoạn $[0;3\pi]$.

A. $T=\frac{17\pi}{4}$.   **B.** $T=2\pi$.   **C.** $T=4\pi$.   **D.** $T=6\pi$.

Câu 30: Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{5}{2}$ thuộc $\left[0;2\pi\right]$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 31: Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$ của phương trình $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=1-2\sin x$ là:

A. 207046π . **B.** 206403π . **C.** 205761π . **D.** 204603π .

Câu 32: Phương trình $3\sin 3x+\sqrt{3}\cos 9x=2\cos x+4\sin^3 3x$ có số nghiệm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 33: Phương trình $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ không phải là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. **B.** $\cos x=0$. **C.** $\sin 9x=0$. **D.** $\cos 2x=0$.

Câu 34: Phương trình $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 35: Phương trình $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 36: Phương trình $(2\sin x+1)(4\cos 4x+2\sin x)+4\cos^3 x=3$ nhận các giá trị $x=\arccos m+k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ làm nghiệm thì giá trị m là:

A. $m=\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $m=\frac{1}{16}$ **D.** $m=-\frac{1}{16}$.

Câu 37: Phương trình $\frac{\sin 5x}{5\sin x}=1$ có số nghiệm là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Câu 38: Phương trình $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi;x=\beta+k2\pi,k\in Z,0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ thì $\alpha.\beta$ bằng:

A. $\frac{\pi^2}{12}$ **B.** - $\frac{\pi^2}{12}$ **C.** $\frac{7\pi}{12}$ **D.** $\frac{\pi^2}{12^2}$

Câu 39: Phương trình $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** π

Câu 40: Phương trình $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;3\pi)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 41: Phương trình $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin(x+\frac{\pi}{4})}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi;x=\beta+k2\pi,\alpha\neq\beta;k\in Z,-\pi<\alpha,\beta<\pi$ thì $\alpha^2+\beta^2$ là:

A. $\frac{\pi^2}{36}$ **B.** $\frac{35\pi^2}{36}$ **C.** $\frac{13\pi^2}{18}$ **D.** $\frac{15\pi^2}{18}$

Câu 42: Phương trình $\frac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 x\,(1)$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Câu 43: Phương trình $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ có nghiệm dương nhỏ nhất là a và nghiệm âm lớn nhất là b thì $a+b$ là:

A. π. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $-\frac{\pi}{3}$.

Câu 44: Phương trình $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ có tổng 2 nghiệm âm lớn nhất liên tiếp là:

A. $-\frac{3\pi}{2}$. **B.** $-\pi$. **C.** $-\frac{\pi}{2}$. **D.** $-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 45: Phương trình $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[1;70]$?

A. 32. **B.** 33. **C.** 34. **D.** 35.

Câu 46: Phương trình $\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$ có các nghiệm là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=\pm\frac{1}{2}\arccos m+k\pi$. Giá trị của m là:

A. $m=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$. **B.** $m=\frac{1\pm\sqrt{17}}{16}$. **C.** $m=\frac{\pm1+\sqrt{17}}{8}$. **D.** $m=\frac{\pm1+\sqrt{17}}{16}$.

Câu 47: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 48: Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$ có bao nghiêu nghiệm trên $(2\pi;3\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 49: Tổng 2 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình $4\sin^3 x-\sin x-\cos x=0$ bằng:

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{2}$. **C.** $-\frac{5\pi}{4}$. **D.** $-\pi$.

Câu 50: Phương trình $1+3\tan x-2\sin 2x$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 51: Từ phương trình $1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x$, ta tìm được $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 52: Các nghiệm của phương trình $\tan x+\cot x=2\sin 2x+\cos 2x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\arctan\frac{1}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 53: Phương trình $1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 4 .

Câu 54: Phương trình $\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$ tương đương với phương trình.

A. $\cot x=\sqrt{3}$. **B.** $\cot 3x=\sqrt{3}$. **C.** $\tan x=\sqrt{3}$. **D.** $\tan 3x=\sqrt{3}$.

Câu 55: Phương trình $2\cot 2x-3\cot 3x=\tan 2x$ có nghiệm là:

A. $x=k\frac{\pi}{3}$. **B.** $x=k\pi$. **C.** $x=k2\pi$. **D.** Vô nghiệm.

Câu 56: Giải phương trình $\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x$.

A. $\left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k3\pi \\ x=\pm\frac{5\pi}{4}+k3\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\frac{5\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k3\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ x=\pm\frac{5\pi}{4}+k3\pi \end{array}\right.$.

Câu 57: Phương trình $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{8}+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$.

Câu 58: Phương trình $2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x}$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. **B.** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$. **C.** $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$. **D.** $x=-\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

Câu 59: Phương trình $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x.\cos^2 2x}$ có nghiệm là:.

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+2k\pi \\ x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{24}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$.

Câu 60: Phương trình: $4\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$.

Câu 61: Giải phương trình $\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6x+\cos^6x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}$.

A. $x=k2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$. **B.** $x=\frac{k\pi}{2}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **D.** $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Câu 62: Cho phương trình: $\left(\sin x+\frac{\sin 3x+\cos 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\frac{3+\cos 2x}{5}$. Các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0;2\pi)$ là:

A. $\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$.

Câu 63: **Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích**

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ có số điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 64: **Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng**

Cho phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x$ số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 65: **Sử dụng công thức nhân ba**

Cho phương trình $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;14]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 66: **Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt**

Phương trình $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 67: **Sử dụng công thức hạ bậc cao**

Cho các phương trình sau:

$(1)\ \sin^8x+cos^8x=\frac{17}{16}cos^2 2x$

$(2)\ \sin^8x+cos^8x=\frac{17}{32}$

$(3)\ \sin^8x+cos^8x=\frac{97}{128}$

$(4)\ \sin^8 2x+cos^8 2x=\frac{1}{8}$

Phương trình không tương đương với một trong các phương trình còn lại là:

A. (1). **B.** (2). **C.** (3). **D.** (4).

Câu 68: ***Biểu diễn tổng của các đại lượng không âm***

Phương trình $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$ có phương trình tương đương là:

A. $\cos x=0$. **B.** $\sin 3x+1=0$.

C. $\cos x(\sin 3x+1)=0$. **D.** $\sin x-1=0$.

Câu 69: ***Đặt ẩn phụ - công thức nhân ba***

Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$ có tổng các nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$ là:

A. $\frac{9\pi}{5}$. **B.** $\frac{9\pi}{15}$. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** $\frac{10\pi}{6}$.

Câu 70: ***Đặt ẩn phụ không hoàn toàn***

Phương trình $\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\frac{x}{2}\left(\sin x+3\right)+\sin x+2=0$ có các nghiệm là:

A. $x=k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.. **B.** $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}$.. **C.** $x=\left(2k+1\right)\pi;k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$..

Câu 71: ***Phương pháp đánh giá***

Với phương trình $3\cos 4x+\left(\cos 2x-\sin x\right)^2=7$ (*) thì:

A. trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ phương trình có 1 nghiệm.

B. trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ phương trình có 2 nghiệm

C. trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ phương trình có 3 nghiệm.

D. trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ phương trình có 4nghiệm.

Câu 72: ***Phương pháp hàm số***

Phương trình $\sqrt{\sin^2 x+1}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{\cos^2 x+1}$ (*) có tổng các nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 73: Phương trình $1+\cos x+\sin x+\cos 2x+\sin 2x=0$ có các nghiệm dạng $x_1=a+k2\pi, x_2=b+k2\pi, x_3=c+k2\pi, x_4=d+k2\pi$. Với $0<a,b,c,d<2\pi$ thì $a+b+c+d$ là:

A. 0. **B.** $\frac{7\pi}{2}$. **C.** $\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình $\cos^3 2x-\cos^2 2x-a\sin^2 x=0$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** 3.

Câu 75: Phương trình $\sin 2x+2\cos x=\cos 2x-\sin x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ **B.** $\sin 2x=0$ **C.** $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ **D.** $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 76: Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2}$ đúng với $\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$. Khi đó giá trị của k là

A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Câu 77: Có bao nhiêu giá trị của α trong $[0;2\pi]$ để ba phần tử của $S = \{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ trùng với ba phần tử của $T = \{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x + m\cot x = 8$ có nghiệm.

A. $m > 16$. **B.** $m < 16$. **C.** $m \ge 16$. **D.** $m \le 16$.

Câu 79: Biến đổi phương trình $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ về dạng $\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Tính $b+d$.

A. $b+d = \frac{\pi}{12}$. **B.** $b+d = \frac{\pi}{4}$. **C.** $b+d = -\frac{\pi}{3}$. **D.** $b+d = \frac{\pi}{2}$.

Câu 80: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2m$ vô nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 9.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x + \sin x = \sqrt{2}(m^2+1)$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. **B.** $m \in [-1;1]$. **C.** $m \in (-\infty;+\infty)$

D. $m \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Câu 82: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $(m+1)\sin x - m\cos x = 1 - m$ có nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 11.

Câu 83: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm.

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 84: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình $\cos^3 2x - \cos^2 2x - a\sin^2 x = 0$ có nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** 3.

Câu 85: Giá trị của m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là $m \in [a;b)$ thì $a+b$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 86: Phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x\cos x - m + 2 = 0$ có nghiệm khi $m \in [a;b]$ thì tích $a.b$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{75}{16}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 87: phương trình $m\sin x+(m+1)\cos x=\dfrac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là:

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7

Câu 88: Phương trình $\sin 4x=\tan x$ có nghiệm dạng $x=k\pi$ và $x=\pm m\arccos n+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ thì $m+n$ bằng:

A. $m+n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m+n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m+n=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $m+n=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 89: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

A. $-1\le m\le 0$. **B.** $-1\le m<0$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $-1\le m<\dfrac{1}{2}$.

Câu 90: Biết rằng khi $m=m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x-(5m+1)\sin x+2m^2+2m=0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m=-3$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m_0\in\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{7}{10}\right]$. **D.** $m_0\in\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Câu 91: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\cos^2 3x+(3-2m)\cos 3x+m-2=0$ có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $-1\le m\le 1$. **B.** $1<m\le 2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$.

Câu 92: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x\cos x-\sin x-\cos x+m=0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 93: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-m=0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 94: Phương trình $cos^3x+\sin^3 x=cos2x$ có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là:

A. $\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{5\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{2}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 95: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $11\sin^2 x+(m-2)\sin 2x+3\cos^2 x=2$ có nghiệm?

A. 16. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 6.

Câu 96: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc để phương trình $\sin^2 x-2(m-1)\sin x\cos x-(m-1)\cos^2 x=m$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 97: Tìm điều kiện để phương trình $a\sin^2 x+a\sin x\cos x+b\cos^2 x=0$ với $a\ne 0$ có nghiệm.

A. $a\ge 4b$. **B.** $a\le -4b$. **C.** $\dfrac{4b}{a}\le 1$. **D.** $\left|\dfrac{4b}{a}\right|\le 1$.

Câu 98: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin^2 x+m\sin 2x=2m$ vô nghiệm.

A. $0\le m\le\frac{4}{3}$. **B.** $m<0$, $m>\frac{4}{3}$. **C.** $0<m<\frac{4}{3}$. **D.** $m<-\frac{4}{3}$, $m>0$.

Câu 99: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để phương trình $\left(m^2+2\right)\cos^2 x-2m\sin 2x+1=0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 100: Để phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=a|\sin 2x|$ có nghiệm, điều kiện thích hợp cho tham số a là:

A. $0\le a<\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{8}<a<\frac{3}{8}$. **C.** $a<\frac{1}{4}$. **D.** $a\ge\frac{1}{4}$.

Câu 101: Cho phương trình: $\sin x\cos x-\sin x-\cos x+m=0$, trong đó m là tham số thực. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là:.

A. $-2\le m\le-\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\le m\le 1$. **C.** $1\le m\le\frac{1}{2}+\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\le m\le 1$.

Câu 102: Cho phương trình: $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-8\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-4\sin^2 4x=m$ trong đó m là tham số. Để phương trình là vô nghiệm, thì các giá trị thích hợp của m là:

A. $m<-4$ *hay* $m>0$. **B.** $-\frac{3}{2}\le m\le-1$. **C.** $-2\le m\le-\frac{3}{2}$. **D.** $m<-2$ *hay* $m>0$.

Câu 103: Cho phương trình: $\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=2m.\tan 2x$, trong đó m là tham số. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là:

A. $m\le-\frac{1}{8}$ *hay* $m\ge\frac{1}{8}$. **B.** $m<-\frac{1}{8}$ *hay* $m>\frac{1}{8}$. **C.** $m\le-\frac{1}{2}$ *hay* $m\ge\frac{1}{2}$. **D.** $m\le-1$ *hay* $m\ge 1$.

Câu 104: Cho phương trình $\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{4\tan x}{1+\tan^2 x}=m$. Để phương trình vô nghiệm, các giá trị của tham số m phải thỏa mãn điều kiện:.

A. $-\frac{5}{2}\le m\le 0$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $1<m\le\frac{3}{2}$. **D.** $m<-\frac{5}{2}$ *hay* $m>\frac{3}{2}$.

Câu 105: Để phương trình: $4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ có nghiệm, tham số a phải thỏa điều kiện:

A. $-1\le a\le 1$. **B.** $-2\le a\le 2$. **C.** $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$. **D.** $-3\le a\le 3$.

Câu 106: Để phương trình $\frac{a^2}{1-\tan^2 x}=\frac{\sin^2 x+a^2-2}{\cos 2x}$ có nghiệm, tham số a phải thỏa mãn điều kiện:

A. $|a|\ge 1$. **B.** $|a|\ge 2$. **C.** $|a|\ge 3$. **D.** $|a|>1, a\ne\pm\sqrt{3}$.

Câu 107: Tìm m để phương trình $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

A. $-1<m\le 1$. **B.** $0<m\le\frac{1}{2}$. **C.** $-1<m\le-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}<m\le 1$.

Câu 108: Tìm m để phương trình $\cos 2x-(2m-1)\cos x-m+1=0$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $-1<m\le 0$. **B.** $0\le m<1$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $-1<m<1$.

Câu 109: Tìm m để phương trình $2\sin x+m\cos x=1-m$ có nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $-2\le m\le 6$. **C.** $1\le m\le 3$ **D.** $-1\le m\le 3$.

Câu 110: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m+\sin(m+\sin 3x)=\sin(3\sin x)+4\sin^3 x$ có nghiệm thực?

A. 9 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 8

Câu 111: Cho phương trình: $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$. Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ khi:

A. $m>-1$. **B.** $m\ge -1$. **C.** $-1\le m\le 1$. **D.** $-1<m\le -\frac{1}{2}$.

Câu 112: Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. $m\ge\frac{3\sqrt{5}}{4}$ **B.** $m\ge\frac{3\sqrt{5}+9}{4}$ **C.** $m\ge\frac{\sqrt{65}-9}{2}$ **D.** $m\ge\frac{\sqrt{65}-9}{4}$

Câu 113: Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x+1)(4\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ là:

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Câu 114: Gọi a,b là các số nguyên thỏa mãn $(1+\tan 1^0)(1+\tan 2^0)...(1+\tan 43^0)=2^a.(1+\tan b^0)$ đồng thời $a,b\in[0;90]$. Tính $P=a+b$?

A. 22 **B.** 46 **C.** 27 **D.** 44

Câu 115: Tìm m để phương trình $(m+1)\cos x+(m-1)\sin x=2m+3$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=\frac{\pi}{3}$.

A. $m=2+\sqrt{3}$ **B.** $m=2-\sqrt{3}$ **C.** $m=2\pm\sqrt{3}$ **D.** Không tồn tại m

Câu 116: Các giá trị của $m\in[a;b]$ để phương trình $\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5$ có nghiệm thì:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=12$. **C.** $a.b=-8$. **D.** $a.b=8$.

Câu 117: Cho phương trình $m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là:

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 118: Phương trình $\cos 2x+(2m+1)\sin x-m-1=0$ có nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ khi tất cả các giá trị thỏa mãn:

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in[-1;1]$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Câu 119: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$ có nghiệm?

A. 2000. **B.** 2001. **C.** 2010. **D.** 2011.

C - HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x+3}$ lần lượt là:

A. $m=-1;\ M=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-1;\ M=2$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2};\ M=1$. **D.** $m=1;\ M=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

+ TXĐ: $\mathbb{R}$.

+ $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x+3}\Leftrightarrow(2y-1)\sin x-(y+1)\cos x=-3y$ (1)

+ Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm x là $(2y-1)^2+(y+1)^2\ge 9y^2$

$\Leftrightarrow 4y^2+2y-2\le 0 \Leftrightarrow -1\le y\le\dfrac{1}{2}$.

+ Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{1}{2};\min\limits_{\mathbb{R}} y=-1$.

Câu 2: Hàm số $y=\tan x+\cot x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. **B.** $\left(\pi+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

C. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$. **D.** $(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Ta chọn $k=3\to x\ne\dfrac{3\pi}{2}$ nhưng điểm $\dfrac{3\pi}{2}$ thuộc khoảng $(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi)$.

Vậy hàm số không xác định trong khoảng $(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi)$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{5+2\cot^2 x-\sin x}+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số xác định khi và chỉ khi các điều kiện sau thỏa mãn đồng thời.

$5+2\cot^2 x-\sin x\ge 0$, $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ xác định và $\cot x$ xác định.

□ Ta có

$\begin{cases}5+2\cot^2 x-\sin x\ge 0\\ 1-\sin 2x\ge 0\Rightarrow 5-\sin x\ge 0\end{cases}\Rightarrow 5+2\cot^2 x-\sin x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$xác định $\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

□ $\cot x$ xác đinh $\Leftrightarrow \sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Do đó hàm số xác đinh $\begin{cases} x\neq -\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y=\frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Viết lại đáp án B $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$.

Kết quả được đáp án A là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.
Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.
Xét đáp án **D.**

● Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x\geq 0 \Leftrightarrow 2x\in[k2\pi;\pi+k2\pi] \Leftrightarrow x\in\left[k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$.

$\longrightarrow D=\left[k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]\ (k\in\mathbb{Z})$..

● Chọn $x=\frac{\pi}{4}\in D$ nhưng $-x=-\frac{\pi}{4}\notin D$. Vậy $y=\sqrt{\sin 2x}$ không chẵn, không lẻ.

Câu 5: Số giờ có ánh sáng của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|+10$, với $t\in Z$ và $0<t\leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?.

A. 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì $\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|\leq 1 \Rightarrow y=4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)+10\leq 14\right|$.

Ngày có ánh nắng mặt trời chiếu nhiều nhất

$\Leftrightarrow y=14 \Leftrightarrow \sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t-60)=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=149+356k$.

Mà $0<t\leq 365 \Leftrightarrow 0<149+356k\leq 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356}<k\leq\frac{54}{89}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$.

Với $k=0 \Rightarrow t=149$ tức rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0<t\leq 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức

$h=3\cos\left(\frac{\pi t}{7=8}+\frac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=k2\pi$ với $0<t\le 24$ và $k\in\mathbb{Z}$.

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn.

Vì với $t=14$ thì $\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=2\pi$ (đúng với $k=1\in\mathbb{Z}$).

Câu 7: Hàm số $y=4\cot^2 2x-\frac{\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{\tan x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. 0. **B.** $3-2\sqrt{3}$. **C.** $2-2\sqrt{2}$. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\cot 2x=\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$

Từ đó suy ra $y=3\cot^2 2x-\frac{2\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{2\tan x}=3\cot^2 2x-2\sqrt{3}\cot 2x$

$=\left(\sqrt{3}\cot 2x-1\right)^2-1\ge -1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $\min y=-1 \Leftrightarrow \cot 2x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 8: Hàm số $y=2\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $5-2\sqrt{2}$. **B.** $5+2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $y=2\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$.

Ta có $y^2\le\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow y^2\le 5+2\sqrt{2}$.

Do đó ta có $-\sqrt{5+2\sqrt{2}}\le y\le\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x$ là

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x \Leftrightarrow y=1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x$.

$\Leftrightarrow y=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow y=1-\frac{1}{2}\left[\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\Leftrightarrow y=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}$ là

A. 0. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt[4]{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}\ge 2\sqrt{\sin x\cos x\sqrt{\sin x\cos x}}$

$\Leftrightarrow y\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}}\ge 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2x=0$.

Câu 11: Hàm số $y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}\Leftrightarrow (y-2)\sin 2x-(y+1)\cos 2x=-3y$..

Điều kiện để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (y-2)^2+(y+1)^2\ge(-3y)^2\Leftrightarrow 7y^2+2y-5\le 0$.

$\Leftrightarrow -1\le y\le\frac{5}{7}\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}}y\in\{-1;0\}$ nên có 2 giá trị nguyên.

Câu 12: Cho hàm số $h(x)=\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x.\cos x}$ .Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi số thực x (trên toàn trục số) là

A. $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$. **B.** $0\le m\le\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}\le m\le 0$. **D.** $m\le\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét hàm số $g(x)=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2-m\sin 2x$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-m\sin 2x$

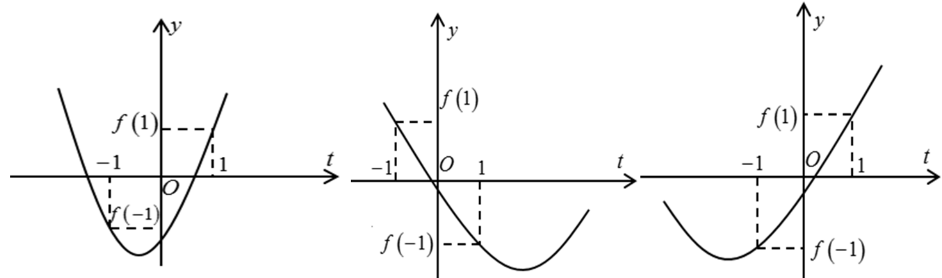
$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-m\sin 2x$.

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Hàm số $h(x)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow g(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2-mt+1\ge 0,\forall t\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow t^2+2mt-2\le 0,\forall t\in[-1;1]$.

Đặt $f(t)=t^2+2mt-2$ trên $[-1;1]$.



Đồ thị hàm số có thể là một trong ba đồ thị trên.

Ta thấy $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(1)$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1)$

Ycbt $f(t) = t^2 + 2mt - 2 \le 0, \forall t \in [-1;1] \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;1]} f(t) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) \le 0 \\ f(-1) \le 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 + 2m \le 0 \\ -1 - 2m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$.

Câu 13: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{3x}{\sqrt{2\sin^2 x - m\sin x + 1}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.
B. $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.
C. $m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$.
D. $m \in \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2\sin^2 x - m\sin x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1;1]$

Lúc này ta đi tìm điều kiện của m để $f(t) = 2t^2 - mt + 1 > 0, \forall t \in [-1;1]$

Ta có $\Delta_t = m^2 - 8$

TH 1: $\Delta_t < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$. Khi đó $f(t) > 0, \forall t$ (thỏa mãn).

TH 2: $\Delta_t = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2\sqrt{2} \\ m = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (thử lại thì cả hai trường hợp đều không thỏa mãn).

TH 3: $\Delta_t > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2\sqrt{2} \\ m > 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ khi đó tam thức $f(t) = 2t^2 - mt + 1$ có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2\ (t_1 < t_2)$.

Để $f(t) > 0, \forall t \in [-1;1]$ thì $\left[\begin{array}{l} t_1 \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{m - \sqrt{m^2 - 8}}{4} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \ge m - 4\ (VN) \\ t_2 \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{4} \le -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \le -m - 4\ (VN) \end{array}\right.$.

Vậy $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Với các bài toán dạng này ta cần chia ba trường hợp để tìm đủ các giá trị của m.
Ở bài toán trên trong **TH3** đã áp dụng qui tắc xét dấu tam thức bậc hai "trong trái ngoài cùng". Tức là trong khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với hệ số a, còn khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số a.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2 x}$

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2 x} \Leftrightarrow y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky cho 4 số: 1; 1; $\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}$; $\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}$ ta có:

$1.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+1.\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x} \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}=\sqrt{2}.\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{2.1}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$

Hay $y\le\frac{\sqrt{22}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $1+\frac{1}{2}\cos^2 x=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Câu 15: Cho hàm số $y=\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$T **B.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$

C. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Ta thấy $2-\cos x>0, \forall x\in R$ và $1+\cos x>0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\frac{1}{2-\cos x}$ và $\frac{1}{1+\cos x}$ là hai số dương. Áp dụng vất đẳng thức AM- GM cho hai số dương ta có

$\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\ge\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}$

Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}\le\frac{2-\cos x+1+\cos x}{2}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow y\ge\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}\ge\frac{4}{3}$

Câu 16: Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$y=\sqrt{1+\tan x.\tan y}+\sqrt{1+\tan y.\tan z}+\sqrt{1+\tan z.\tan x}$

A. $y_{\max}=1+2\sqrt{2}$. **B.** $y_{\max}=3\sqrt{3}$. **C.** $y_{\max}=\sqrt{4}$. **D.** $y_{\max}=2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $x+y+z=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}-z\Rightarrow \tan(x+y)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\Leftrightarrow \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=\frac{1}{\tan z}$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z=1-\tan x.\tan y \Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y=1$

Ta thấy $\tan x.\tan z$; $\tan y.\tan z$; $\tan x.\tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có:

$1.\sqrt{1+\tan x.\tan y}+1.\sqrt{1+\tan y.\tan z}+1.\sqrt{1+\tan z.\tan x}\le$

$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{1.\tan x.\tan z+1.\tan y.\tan z+1.\tan x.\tan y}=$

$=\sqrt{3}\sqrt{3+(\tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y)}=2\sqrt{3}$

Vậy $y_{\max}=2\sqrt{3}$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 17: Hỏi trên đoạn $[-2017;2017]$, phương trình $(\sin x+1)(\sin x-\sqrt{2})=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 641. **D.** 642.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\sqrt{2}\,(\text{vo nghiem})\end{array}\right.\Leftrightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Theo giả thiết $-2017\le-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\le 2017\Leftrightarrow\dfrac{-2017+\frac{\pi}{2}}{2\pi}\le k\le\dfrac{2017+\frac{\pi}{2}}{2\pi}$

$\xrightarrow{\text{xap xi}}-320,765\le k\le 321,265\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-320;-319;...;321\}$.

Vậy có tất cả 642 giá trị nguyên của k tương ứng với có 642 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Câu 18: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

A. $\dfrac{\pi}{9}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{9}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3x-\dfrac{\pi}{4}=\pi-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi\\ 3x=\dfrac{11\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{11\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

TH1. Với $x=\dfrac{7\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\xrightarrow{\text{Cho}}\left[\begin{array}{l}x>0\Leftrightarrow k>-\dfrac{7}{24}\Rightarrow k_{\min}=0\to x=\dfrac{7\pi}{36}\\ x<0\Leftrightarrow k<-\dfrac{7}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\to x=-\dfrac{17\pi}{36}\end{array}\right.$.

TH2. Với $x=\dfrac{11\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\xrightarrow{\text{Cho}}\left[\begin{array}{l}x>0\Leftrightarrow k>-\dfrac{11}{24}\Rightarrow k_{\min}=0\to x=\dfrac{11\pi}{36}\\ x<0\Leftrightarrow k<-\dfrac{11}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\to x=-\dfrac{13\pi}{36}\end{array}\right.$.

So sánh bốn nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất là $x=-\dfrac{13\pi}{36}$ và nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\dfrac{7\pi}{36}$. Khi đó tổng hai nghiệm này bằng $-\dfrac{13\pi}{36}+\dfrac{7\pi}{36}=-\dfrac{\pi}{6}$.

Chọn B.

Câu 19: Tổng hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$ là:

A. $\frac{5\pi}{6}$, **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{7\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)$

$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\ =1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5+3\cos 4x}{8}$

$\Rightarrow \frac{5+3\cos 4x}{8}=\frac{7}{16}\Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 4x=\cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\4x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\\x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm dương nhỏ nhất là $x_1=\frac{\pi}{6}$ và $x_2=\frac{\pi}{3}$ Vậy $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$

Câu 20: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}+\sin^2 x$ trên khoảng $\left(0;2\pi\right)$.

A. $T=\frac{7\pi}{8}$. **B.** $T=\frac{21\pi}{8}$. **C.** $T=\frac{11\pi}{4}$. **D.** $T=\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Do $0<x<2\pi\longrightarrow 0<-\frac{\pi}{8}+k\pi<2\pi\Leftrightarrow \frac{1}{8}<k<\frac{17}{8}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=1\to x=\frac{7\pi}{8}\\k=2\to x=\frac{15\pi}{8}\end{array}\right.$

$\longrightarrow T=\frac{7\pi}{8}+\frac{15\pi}{8}=\frac{11}{4}\pi$.

Chọn C.

Câu 21: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất x_0 của $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$.

A. $x_0=\frac{\pi}{2}$. **B.** $x_0=\frac{\pi}{18}$. **C.** $x_0=\frac{\pi}{24}$. **D.** $x_0=\frac{\pi}{54}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin 3x-4\sin^3 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\9x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{9}\\x=\frac{7\pi}{54}+\frac{k2\pi}{9}\end{array}\right.$

$$\xrightarrow{\text{Cho}>0}\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{9}>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\min}=0\rightarrow x=\frac{\pi}{18}\\ \frac{7\pi}{54}+\frac{k2\pi}{9}>0\Leftrightarrow k>-\frac{7}{12}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\min}=0\rightarrow x=\frac{7\pi}{54}\end{array}\right..$$

So sánh hai nghiệm ta được nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{\pi}{18}$.

Chọn B.

Cách trắc nghiệm. Thử từng nghiệm của đáp án vào phương trình và so sánh nghiệm nào thỏa mãn phương trình đồng thời là nhỏ nhất thì ta chọn.

Câu 22: Số nghiệm của phương trình $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin 5x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x=\sin 7x\Leftrightarrow\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 7x$

$$\Leftrightarrow\sin 7x=\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x=5x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 7x=\pi-\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

- $0<\frac{\pi}{6}+k\pi<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0\rightarrow x=\frac{\pi}{6}$.
- $0<\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{3}<k<\frac{8}{3}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=0\rightarrow x=\frac{\pi}{18}\\ k=1\rightarrow x=\frac{2\pi}{9}\\ k=2\rightarrow x=\frac{7\pi}{18}\end{array}\right..$

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn.

Chọn D.

Câu 23: Giải phương trình $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$.

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ và $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow-\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin 2x\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x=-2\sin 2x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=-\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin(-2x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=-2x+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{6}=\pi+2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{5\pi}{6}-k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Xét nghiệm $x=-\frac{5\pi}{6}-k2\pi \xrightarrow[k\in\mathbb{Z},\, k'\in\mathbb{Z}]{k=-1-k'} x=\frac{7\pi}{6}+k'2\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3},\ x=\frac{7\pi}{6}+k'2\pi\ \left(k,k'\in\mathbb{Z}\right)$.

Chọn B.

Câu 24: Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x+\sqrt{3}\cos 7x=\sin 7x+\sqrt{3}\cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(-\frac{\pi}{12};0\right)$. **B.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{12}\right]$. **C.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6}\right)$. **D.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=\sin 7x-\sqrt{3}\cos 7x$

$\Leftrightarrow \sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-\frac{\pi}{3}=7x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 9x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{8} \end{array}\right.$

$\xrightarrow{\text{Cho}<0} \left[\begin{array}{l} k\pi<0\Leftrightarrow k<0 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\max}=-1\to x=-\pi \\ \frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{8}<0\Leftrightarrow k<-\frac{5}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\max}=-1\to x=-\frac{\pi}{48} \end{array}\right.$. So sánh hai nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\frac{\pi}{48}\in\left(-\frac{\pi}{12};0\right)$.

Chọn A.

Câu 25: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$. **B.** $x_0\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$. **C.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$. **D.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$.

Đặt $t=x-\frac{\pi}{6}\longrightarrow x=t+\frac{\pi}{6}\to 2x=2t+\frac{\pi}{3}\to 2x+\frac{\pi}{6}=2t+\frac{\pi}{2}$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)+\sin t=1\Leftrightarrow \cos 2t+\sin t=1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 t-\sin t=0\Leftrightarrow \sin t\left(2\sin t-1\right)=0$.

- $\sin t=0\Leftrightarrow t=k\pi\longrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min}=0\to x=\frac{\pi}{6}$.

- $\sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \frac{\pi}{3}. \\ t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \pi + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \pi. \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Chọn B.

Câu 26: Gọi a, b lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$, ta có:

A. $ab = 0$. **B.** $ab = \frac{11\pi^2}{6}$. **C.** $ab = -\frac{11\pi^2}{6}$. **D.** $ab = -\frac{\pi^2}{36}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

+ Điều kiện: $2\cos^2 x - \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

+ Phương trình $\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(2\cos^2 x - 1 - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(\cos 2x - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + (2k+2)\frac{\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình có các nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} - k2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

Chọn $k = 1 \Rightarrow a = \frac{11\pi}{6}; k = 0 \Rightarrow b = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow a.b = -\frac{11\pi^2}{36}$

Câu 27: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Phương trình $\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ (cùng bậc lẻ)

Chia 2 vế cho $\cos^3 x\neq 0$ (do điều kiện)

Phương trình $\Leftrightarrow 8\tan^2 x=\sqrt{3}\tan x.\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 8\tan^2 x=\sqrt{3}\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x-7\tan^2 x+\sqrt{3}\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\tan^2 x-6\tan x-\sqrt{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \tan x=\sqrt{3}+2\\ \tan x=\sqrt{3}-2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\arctan\left(\sqrt{3}+2\right)+k\pi\\ x=\arctan\left(\sqrt{3}-2\right)+k\pi\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Dựa vào việc biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta thấy số điểm biểu diễn nghiệm cần tìm là 4 $\Rightarrow$ Đáp án **B.**

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\left(\sqrt{3}+1\right)=0$ trên $\left(0;\pi\right)$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(1+\cot^2 x\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\left(\sqrt{3}+1\right)=0\Leftrightarrow \cot^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=-1\\ \cot x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \cot x=\cot\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\xrightarrow{x\in(0;\pi)}x=\dfrac{3\pi}{4}\text{(thỏa mãn)}\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\xrightarrow{x\in(0;\pi)}x=\dfrac{\pi}{6}\text{(thỏa mãn)}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn.

Chọn B.

Câu 29: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0$ trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$.

A. $T=\dfrac{17\pi}{4}$. **B.** $T=2\pi$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=6\pi$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x+2\cos x-2-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\text{(loại)}\end{array}\right.\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\xrightarrow{x\in[0;3\pi]}x=\dfrac{\pi}{4};x=\dfrac{9\pi}{4}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\xrightarrow{x\in[0;3\pi]}x=\dfrac{7\pi}{4}\end{array}\right.\longrightarrow T=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{9\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{17\pi}{4}.$$

Chọn A.

Câu 30: Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{5}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow -2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}\\ \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{3}{2}(\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}-x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

.

Ta có $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \xrightarrow{x\in[0;2\pi]} x=\frac{11\pi}{6}$; $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \xrightarrow{x\in[0;2\pi]} x=\frac{\pi}{2}$.

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn.

Chọn B.

Câu 31: Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$ của phương trình $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=1-2\sin x$ là:

A. 207046π. **B.** 206403π. **C.** 205761π. **D.** 204603π.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1-2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 x=1-2\sin x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 x-2\sin x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=4 (VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

$0<x<2018 \Leftrightarrow 0<kx<2018 \Leftrightarrow 0<k<\frac{2018}{\pi}\Rightarrow k\in\{1,2,3,...,642\}$

Vậy tổng các nghiệm cần tìm là:

$S=\pi+2\pi+3\pi+...+642\pi=\pi(1+2+3+...+642)=\frac{642(642+1)}{2}\pi=206403\pi$

Câu 32: Phương trình $3\sin 3x+\sqrt{3}\cos 9x=2\cos x+4\sin^3 3x$ có số nghiệm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin 3x-4\sin^3 3x+\sqrt{3}\cos 9x=2\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 9x+\sqrt{3}\cos 9x=2\cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x=\cos x$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin 9x+\cos\frac{\pi}{6}\cos 9x=\cos x \Leftrightarrow \cos\left(9x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-\frac{\pi}{6}=x+k2\pi \\ 9x-\frac{\pi}{6}=-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{48}+k\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{60}+k\frac{\pi}{5} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

- **TH1**: $x=\frac{\pi}{48}+k\frac{\pi}{4}$. Chọn $k=\{0;1\}\Rightarrow x=\left\{\frac{\pi}{48};\frac{13\pi}{48}\right\}\subset\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

- **TH2:** $x=\frac{\pi}{60}+k\frac{\pi}{5}$. Chọn $k=\{0;1;2\}\Rightarrow x=\left\{\frac{\pi}{60};\frac{13\pi}{60};\frac{5\pi}{12}\right\}\subset\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Câu 33: Phương trình $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ không phải là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. **B.** $\cos x=0$. **C.** $\sin 9x=0$. **D.** $\cos 2x=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình

$$\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x \Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1-\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow(\cos 12x+\cos 10x)-(\cos 8x+\cos 6x)=0\Leftrightarrow 2\cos 11x\cos x-\cos 7x\cos x=0$$ hông

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0\Leftrightarrow -4\cos x\sin 9x\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 9x=0\Rightarrow\cos 2x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.$$

phải là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Câu 34: Phương trình $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]-3\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4\pi\right]=1+2\sin x$

$$\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1+2\sin x\Leftrightarrow\cos 2x+3\sin x=1+2\sin x$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+3\sin x=1+2\sin x\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Mà $x\in\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$ nên $x\in\left\{\pi;2\pi;\frac{13\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right\}$

Vậy phương trình có 5 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$.

Câu 35: Phương trình $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

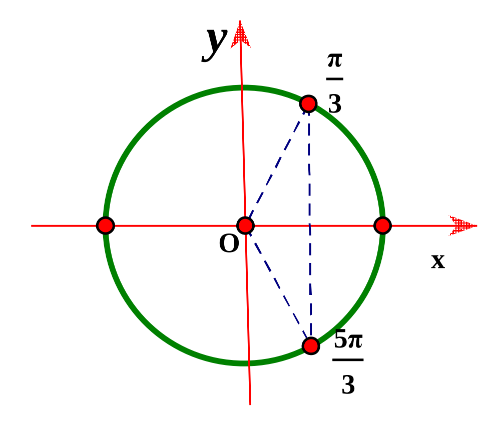
Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+4\cos x=2+2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)-2(1-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-2)(1-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-2=0\\1-2\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=2(VN)\\\cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{5\pi}{3}$.



Câu 36: Phương trình $(2\sin x+1)(4\cos 4x+2\sin x)+4\cos^3 x=3$ nhận các giá trị $x=\arccos m+k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ làm nghiệm thì giá trị m là:

A. $m=\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $m=\frac{1}{16}$. **D.** $m=-\frac{1}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow (2\sin x+1)(4\cos 4x+2\sin x)+4(1-\sin^2 x)-3=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(4\cos 4x+2\sin x)+(1-2\sin x)(1+2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(4\cos 4x+1)=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{2}\\\cos 4x=-\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{1}{4}\arccos(-\frac{1}{4})+k\frac{\pi}{2}\\x=-\frac{1}{4}\arccos(-\frac{1}{4})+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $m=\frac{1}{4}$

Câu 37: Phương trình $\frac{\sin 5x}{5\sin x}=1$ có số nghiệm là:

A. 0   **B.** 1   **C.** 2   **D.** vô số

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq \pm 1$

$Pt\Leftrightarrow \sin 5x-5\sin x=0\Leftrightarrow \sin 5x-\sin x-4\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x-4\sin x=0\Leftrightarrow 2\cos 3x.2\sin x\cos x-4\sin x=0$

$\Leftrightarrow 4\sin x(\cos 3x\cos x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0(l)\\ \frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)-1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 2x+2\cos^2 2x-1-2=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-\frac{3}{2}(VN)\end{array}\right.$

Với $\cos 2x=1\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=0$ (loại vì không TMĐK)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Câu 38: Phương trình $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi;x=\beta+k2\pi,k\in Z,0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ thì $\alpha.\beta$ bằng:

A. $\frac{\pi^2}{12}$ **B.** - $\frac{\pi^2}{12}$ **C.** $\frac{7\pi}{12}$ **D.** $\frac{\pi^2}{12^2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq \pm 1$

$Pt\Leftrightarrow 3\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^4 x=2\cos x.\sin^2 x+3\sqrt{2}\cos x.\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)-2\sin^2 x(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x-2\sin^2 x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0(1)\\ 2\cos^2 x+3\cos x-2=0(2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\sqrt{2}(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$

$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-2(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$

Vậy $\alpha=\frac{\pi}{4};\beta=\frac{\pi}{3};\alpha.\beta=\frac{\pi^2}{12}$

Câu 39: Phương trình $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** π

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\\ \sin 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \sin x\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq\pm 1\\ \sin x\neq 0\\ \sin x\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$Pt\Leftrightarrow\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{2\sin x\cos x}=\dfrac{1}{4\sin x\cos x\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x+\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1-2\sin^2 x)+1-2\sin^2 x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1-2\sin^2 x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\,(l)\\ 1-2\sin^2 x-\sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\,(l)\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$

=>có 2 nghiệm trên $(0;\pi)$ là x=$\dfrac{\pi}{6}$ và x=$\dfrac{5\pi}{6}$

Vậy tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là: $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=\pi$

Câu 40: Phương trình $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;3\pi)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq-\sqrt{3}\end{array}\right.(*)$

$Pt\Leftrightarrow\sin 2x+\cos 2x-\sin x-1=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sin x+2\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\sin x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$

Kết hợp điều kiện (*)=>Nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

Vậy có hai nghiệm thuộc $(0;3\pi)$ là $x=\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\dfrac{7\pi}{3}$

Câu 41: Phương trình $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin(x+\frac{\pi}{4})}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi;x=\beta+k2\pi,\alpha\neq\beta;k\in Z,-\pi<\alpha,\beta<\pi$ thì $\alpha^2+\beta^2$ là:

A. $\dfrac{\pi^2}{36}$ **B.** $\dfrac{35\pi^2}{36}$ **C.** $\dfrac{13\pi^2}{18}$ **D.** $\dfrac{15\pi^2}{18}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1\end{array}\right.(*)$

$$Pt \Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+1-2\sin^2 x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}=1$$

$$\Rightarrow 2+\sin x-2\sin^2 x=1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1 \\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện(*) ta có nghiệm của pt là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=\frac{\pi^2}{36}+\frac{25\pi^2}{36}=\frac{26\pi^2}{36}=\frac{13\pi^2}{18}$$

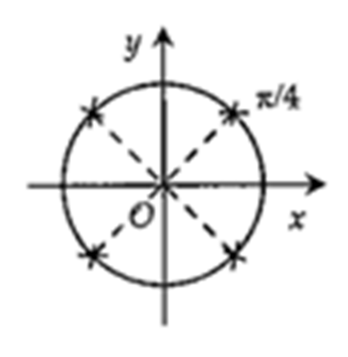
Câu 42: Phương trình $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 x\,(1)$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}\sin(x+\frac{\pi}{4})\neq 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}-x)\neq 0 \\ \cos(x+\frac{\pi}{4})\neq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{4}-x)\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq \frac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq \frac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$



Ta có: $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\cdot\frac{4}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\cdot\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=1$

$$(*)\Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 4x=1-\sin^2 4x \Leftrightarrow \sin^2 4x=0\,.$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0 \\ \cos x=0\,(L)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}).$$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ nghiệm của phương trình (1) là $x=k\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

Vậy số điểm biểu diễn cần tìm là 4.

Lưu ý: Ở bài nầy điều kiện bài toán có thể gộp thành $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

Câu 43: Phương trình $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ có nghiệm dương nhỏ nhất là a và nghiệm âm lớn nhất là b thì $a+b$ là:

A. π. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $-\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$

$\Leftrightarrow 1+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{2}$, nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{\pi}{6}$.

Vậy $a+b=\frac{\pi}{3}$.

Câu 44: Phương trình $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ có tổng 2 nghiệm âm lớn nhất liên tiếp là:

A. $-\frac{3\pi}{2}$. **B.** $-\pi$. **C.** $-\frac{\pi}{2}$. **D.** $-\frac{5\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x.\cos^2 x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\cos 4x+\sin 2x-3=0$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\left(1-2\sin^2 2x\right)+\sin 2x-3=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x=-2(vn) \\ \sin 2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy tổng hai nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}=-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 45: Phương trình $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[1;70]$?

A. 32. **B.** 33. **C.** 34. **D.** 35.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

PT: $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - \left(1 + \tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Mà $x \in [1;70] \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \leq 70$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{105}{\pi} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k \in \{0;1;2;...;32\}$

Vậy PT có 33 nghiệm trên $[1;70]$

Câu 46: Phương trình $\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \pm\frac{1}{2}\arccos m + k\pi$. Giá trị của m là:

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$. **B.** $m = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{16}$. **C.** $m = \frac{\pm 1 + \sqrt{17}}{8}$. **D.** $m = \frac{\pm 1 + \sqrt{17}}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos 5x + \cos x\right) + \left(\cos 5x + \cos 3x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x + 2\cos 4x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\cos 2x + \cos 4x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[\left(4\cos^2 x - 3\cos x\right)\cos 2x + \cos 4x\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[\left(2\cos 2x - 1\right)\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$

Vậy $m = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

Câu 47: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

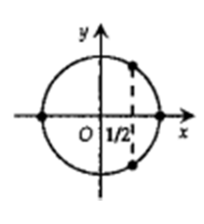
Chọn C.

$\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\sin x+2\sin x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$



Vậy có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 48: Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$ có bao nghiêu nghiệm trên $(2\pi;3\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)\right]^2=1$$

$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$

$\Leftrightarrow 1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1-2\sin 2x+\sin^2 2x=1$

$\Leftrightarrow 3-2\cos 2x-2\sin 2x=1$

$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc $(2\pi;3\pi)$.

Câu 49: Tổng 2 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình $4\sin^3 x-\sin x-\cos x=0$ bằng:

A. $\dfrac{5\pi}{2}$. **B.** $-\dfrac{5\pi}{2}$. **C.** $-\dfrac{5\pi}{4}$. **D.** $-\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Trường hợp 1: $\cos x=0\Leftrightarrow\sin^2 x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.$

Với $\sin x=1 \Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 3=0$ (vô nghiệm).

Với $\sin x=-1 \Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 5=0$ (vô nghiệm).

Vậy $\cos x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Trường hợp 2: $\cos x \ne 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

Phương trình $\Leftrightarrow 4.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=0$

$\Leftrightarrow 4\tan^3 x-\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-\left(1+\tan^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan^2 x-\tan x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ 3\tan^2 x+2\tan x+1=0\,(VN)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Với $k=-1 \Rightarrow x=-\frac{3\pi}{4}$. Với $k=-2 \Rightarrow x=-\frac{7\pi}{4}$.

Vậy tổng 2 nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}=-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 50: Phương trình $1+3\tan x-2\sin 2x$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+3\frac{\sin x}{\cos x}=4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x+3\sin x=4\sin x\cos^2 x$ (*)

Đến đây ta thấy phương trình (*) có cùng bậc lẻ cao nhất là 3, ta chia 2 vế cho $\cos^3 x \ne 0$ (do điều kiện)

$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}+3\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}=4\tan x$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x+1\right)\left(3\tan^2 x-2\tan x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (TMĐK)

□ Số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 2.

Câu 51: Từ phương trình $1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x$, ta tìm được $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow 1+\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)=\frac{3}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2+\left(\sin x+\cos x\right)\left(2-\sin 2x\right)=3\sin 2x.$

Đặt $t=\sin x+\cos x$ $\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\longrightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình trở thành $2+t\left(2-t^2+1\right)=3\left(t^2-1\right)$

$\Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-1\pm\sqrt{6}\,(\text{loại}) \end{array}\right.$.

Với $t=-1$, ta được $\sin x+\cos x=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mà $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \longrightarrow \cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn D.

Câu 52: Các nghiệm của phương trình $\tan x+\cot x=2\sin 2x+\cos 2x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\arctan\frac{1}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2\sin 2x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x\cos x\sin 2x+\sin x\cos x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 1=\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$ (*)(đây là phương trình bậc 2)

Chia 2 vế cho $\sin^2 2x\neq 0$ (do điều kiện) ta được:

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 2x}=1+\frac{1}{2}\cot 2x$

$\Leftrightarrow 1+\cot^2 2x=1+\frac{1}{2}\cot 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 2x=0 \\ \cot 2x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x=arc\cot\frac{1}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$ (TMĐK)

Câu 53: Phương trình $1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1-\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+t-\left(1-t^2\right)=0 \Leftrightarrow t^2+t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$ (TMĐK)

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với $t=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $x=0$ và $x=\frac{\pi}{4}$.

Câu 54: Phương trình $\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$ tương đương với phương trình.

A. $\cot x=\sqrt{3}$. **B.** $\cot 3x=\sqrt{3}$. **C.** $\tan x=\sqrt{3}$. **D.** $\tan 3x=\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \\ \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0 \end{cases}$

$$\text{pt} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin\left(2x+\pi\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{2\sin 2x}{\cos\left(2x+\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{4\sin 2x}{1-2\cos 2x}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sin x-2\sin x\cos 2x-4\sin 2x\cos x}{\cos x\left(1-2\cos 2x\right)}=3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x-\sin 3x+\sin x-2\sin 3x-2\sin x}{\cos x-\cos x-\cos 3x}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3\tan 3x=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 3x=\sqrt{3}$$

Câu 55: Phương trình $2\cot 2x-3\cot 3x=\tan 2x$ có nghiệm là:

A. $x=k\frac{\pi}{3}$. **B.** $x=k\pi$. **C.** $x=k2\pi$. **D.** Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện của phương trình $\sin 2x\neq 0, \sin 3x\neq 0, \cos 2x\neq 0$.

Phương trình tương đương $2\cot 2x-\tan 2x=3\cot 3x$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=3\frac{\cos 3x}{\sin 3x} \begin{cases} \sin 2x\neq 0 \\ \cos 2x\neq 0 \\ \sin 3x\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\sin 2x.\cos 2x}=3\frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Leftrightarrow \frac{1+3\cos 4x}{\sin 4x}=3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$\Leftrightarrow \sin 3x + 3\sin 3x\cos 4x = 3\cos 3x\sin 4x \Leftrightarrow \sin 3x = 3\sin x$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 3\sin x \Leftrightarrow \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi$ (loại do $\sin 2x \neq 0$)

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 56: Giải phương trình $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = k3\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k3\pi \\ x = \pm\frac{5\pi}{4} + k3\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{5\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x = k3\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k3\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = k3\pi \\ x = \pm\frac{5\pi}{4} + k3\pi \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3} = \frac{1+\cos 2x}{2} \Leftrightarrow 2\cos 2.\frac{2x}{3} = 1 + \cos 3.\frac{2x}{3}$

$\Leftrightarrow 2\left[2\cos^2\frac{2x}{3} - 1\right] = 1 + 4\cos^3\frac{2x}{3} - 3\cos\frac{2x}{3} \Leftrightarrow 4\cos^3\frac{2x}{3} - 4\cos^2\frac{2x}{3} - 3\cos\frac{2x}{3} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{2x}{3} = 1 \\ \cos\frac{2x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{3} = k2\pi \\ \frac{2x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{2x}{3} = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k3\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k3\pi \\ x = \pm\frac{5\pi}{4} + k3\pi \end{array}\right.$.

Câu 57: Phương trình $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chon C.

ĐK $\sin 2x \neq 1$

$\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} \Leftrightarrow \cos x + \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = -\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(1 + \frac{1}{\sin x - \cos x}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \sin x-\cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Câu 58: Phương trình $2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x}$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. **B.** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$. **C.** $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$. **D.** $x=-\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

ĐK $\sin 2x\neq 0$

$$2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow 2(\sin 3x-\cos 3x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)-\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[3(\sin x+\cos x)-4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[3(\sin x+\cos x)-4(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[3(\sin x+\cos x)-4(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)\left[3-4(1-\sin x\cos x)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[6-8(1-\sin x\cos x)-\frac{1}{\sin x\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[-2+8\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[-2\sin x\cos x+8(\sin x\cos x)^2-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[2\sin^2 2x-\sin 2x-1\right]=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin 2x=1 \\ \sin 2x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi \\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ 2x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$. Không có đáp án nào đúng.

Câu 59: Phương trình $2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x.\cos^2 2x}$ có nghiệm là:.

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{24}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x.\cos^2 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\ge 0 \\ 4\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x.\cos^2 2x\,(*) \end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow 4\dfrac{1-\cos\left(6x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=1+8\sin 2x\dfrac{1+\cos 4x}{2}$

$\Leftrightarrow 2(1+\sin 6x)=1+4\sin 2x+4\sin 2x\cos 4x$

$\Leftrightarrow 2+2\sin 6x=1+4\sin 2x+2(\sin 6x-\sin 2x)$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\,(1) \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\,(2) \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

+ k chẵn thì $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+2n\pi \Rightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1>0$

+ k lẻ thì $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+(2n-1)\pi=-\dfrac{11\pi}{12}+2n\pi \Rightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1<0$

+ k chẵn thì $(2)\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{12}+2n\pi \Rightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1<0$

+ k lẻ thì $(2)\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{12}+(2n-1)\pi=-\dfrac{7\pi}{12}+2n\pi \Rightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1>0$

Vậy tập nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi \end{array}\right.$.

Câu 60: Phương trình: $4\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$4\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1 \Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x+\pi\right)\right)+\cos 3x=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\frac{1}{2}+\cos 2x\right)+\cos 3x=1 \Leftrightarrow \sin x+\sin 3x+\sin\left(-x\right)+\cos 3x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\cos 3x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Câu 61: Giải phương trình $\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}$.

A. $x=k2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$. **B.** $x=\frac{k\pi}{2}$.

C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **D.** $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $4\cos^2 2x+\sin^2 2x=3\cos^2 2x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$$\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x} \Leftrightarrow \frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2+4\sin^2 x.\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)}{4\left(\cos^4 x-\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sin^{10}x+\cos^{10}x=1 \quad (1).$$

Ta có $\begin{cases} \sin^{10}x\le\sin^2 x \\ \cos^{10}x\le\cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sin^{10}x+\cos^{10}x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Do đó

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{10}x=\sin^2 x \\ \cos^{10}x=\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2 x=1 \\ \sin^2 x=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos^2 x=1 \\ \cos^2 x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x=0 \\ \cos^2 x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}.$$

Câu 62: Cho phương trình: $\left(\sin x+\frac{\sin 3x+\cos 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\frac{3+\cos 2x}{5}$. Các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0;2\pi)$ là:

A. $\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $1+2\sin 2x\neq 0$

Phương trình tương đương $5\left(\frac{\sin x+2\sin x\sin 2x+\sin 3x+\cos 3x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x+\cos x-\cos 3x+\sin 3x+\cos 3x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 5\left(\frac{(1+2\sin 2x)\cos x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 5\cos x=3+\cos 2x \quad \Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=2\ (loai)\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$

Vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},x=\frac{5\pi}{3}$ (thỏa điều kiện).

Câu 63: **Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích**

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ có số điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

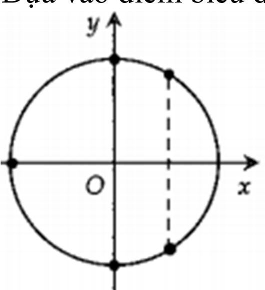
Chọn D.

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0\Leftrightarrow(\cos 3x+\cos x)+(1+\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow 2cos2x\cos x+2cos^2x=0\Leftrightarrow 2cosx(cos2x+cosx)=0$

$\Leftrightarrow 4cosxcos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}cosx=0\\ cos\frac{3x}{2}=0\\ cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Dựa vào điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác



Vậy ta có 5 điểm.

Câu 64: **Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng**

Cho phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x$ số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos 6x+\cos 4x]=\frac{1}{2}[\cos 6x+\cos 2x]$

$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=2x+k2\pi\\4x=-2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=k\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{3}=\frac{k2\pi}{6}\ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm là 6.

Câu 65: Sử dụng công thức nhân ba

Cho phương trình $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;14]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow 4cos^3x-3\cos x-4\left(2cos^2x-1\right)+3\cos x-4=0$

$\Leftrightarrow 4cos^3x-8cos^2x=0 \Leftrightarrow cosx=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $x\in[0;14] \Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{14}{\pi}-\frac{1}{2} \Rightarrow k\in\{0;1;2;3\}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $[0;14]$.

Câu 66: Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt

Phương trình $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]-3\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4\pi\right]=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-3cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1+2\sin x \Leftrightarrow cos2x+3\sin x=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2x+3\sin x=1+2\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\\sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $x\in\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$ nên $x\in\left\{\pi;2\pi;\frac{13\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right\}$

Vậy phương trình có 5 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$.

Câu 67: **Sử dụng công thức hạ bậc cao**

Cho các phương trình sau:

$(1)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{17}{16}cos^2 2x$

$(2)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{17}{32}$

$(3)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{97}{128}$

$(4)\ \sin^8 2x+cos^8 2x=\frac{1}{8}$

Phương trình không tương đương với một trong các phương trình còn lại là:

A. (1). **B.** (2). **C.** (3). **D.** (4).

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có

$\sin^8 x+cos^8 x=\left(\sin^2 x\right)^4+\left(cos^2 x\right)^4=\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^4=\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)$

Giải (1): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{16}cos^2 2x\Leftrightarrow 2cos^4 2x-5cos^2 2x+2=0\Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải (2): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{32}\Leftrightarrow 4cos^4 2x+24cos^2 2x-13=0\Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải (3): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{97}{128}\Leftrightarrow 2cos^4 2x-12cos^2 2x-\frac{81}{8}=0\Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{3}{4}$

Giải (4): $\frac{1}{8}\left(cos^4 4x+6cos^2 4x+1\right)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow 2cos^4 4x+12cos^2 4x=0\Leftrightarrow cos^2 4x=0$

$\Leftrightarrow\left(2\cos^2 2x-1\right)^2=0\Leftrightarrow\cos^2 2x=\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (3) không tương đương với các phương trình còn lại.

Câu 68: ***Biểu diễn tổng của các đại lượng không âm***

Phương trình $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$ có phương trình tương đương là:

A. $\cos x=0$. **B.** $\sin 3x+1=0$.

C. $\cos x(\sin 3x+1)=0$. **D.** $\sin x-1=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\left(1-2\sin^2 3x\right)+4\left(\sin 3x+1\right)=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin^2 3x+4\sin 3x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+2\left(\sin 3x+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin 3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\\ -4\sin^3 x+\sin 3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow\sin x-1=0.$

Câu 69: ***Đặt ẩn phụ - công thức nhân ba***

Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$ có tổng các nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$ là:

A. $\frac{9\pi}{5}$. **B.** $\frac{9\pi}{15}$. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** $\frac{10\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{10}-t\Rightarrow\frac{3x}{2}=\frac{9\pi}{10}-3t$

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow\sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{9\pi}{10}-3t\right)\Leftrightarrow\sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\pi-3t\right)\Leftrightarrow\sin t=\frac{1}{2}\sin\left(3t\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin t=3\mathrm{sint}-4\sin^3\mathrm{t}\Leftrightarrow\sin t\left(1-4\sin^2\mathrm{t}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{sint}=0\\ \sin^2\mathrm{t}=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi(k\in\mathbb{Z})\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{3\pi}{5}\in\left[0;2\pi\right]\\ x=\frac{14\pi}{15}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{14\pi}{15}\in\left[0;2\pi\right]\\ x=\frac{4\pi}{15}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{4\pi}{15}\in\left[0;2\pi\right]\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$ của phương trình là: $\frac{3\pi}{5}+\frac{14\pi}{15}+\frac{14\pi}{15}=\frac{9\pi}{5}$.

Câu 70: ***Đặt ẩn phụ không hoàn toàn***

Phương trình $\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\frac{x}{2}\left(\sin x+3\right)+\sin x+2=0$ có các nghiệm là:

A. $x=k2\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **B.** $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **C.** $x=\left(2k+1\right)\pi;k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}.$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $\mathrm{t}=\sin^2\frac{x}{2}\Rightarrow t\in\left[0;1\right],\forall x\in\mathbb{R}.$

Phương trình tương đương $\mathrm{t}^2-\left(\sin x+3\right)\mathrm{t}+\sin x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=1 & (1)\\ t=\sin x+2(2)\end{array}\right.$

+ Với

$\mathrm{t}=1\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{2}=1\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=(2\mathrm{k}+1)\pi,(\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$

+ Với $\mathrm{t}=\sin x+2\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$

$\left\{\begin{array}{l}\sin^2\frac{x}{2}\le 1\\ \sin x+2\ge 1\end{array}\right.\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sin^2\frac{x}{2}=1\\ \sin x+2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \sin x=-1\end{array}\right.$ (vô nghiệm)

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=(2\mathrm{k}+1)\pi,(\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$.

Nhận xét:

+ Với phương trình này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp đưa về dạng tích $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=0\\B=0\end{array}\right.$.

+ Với phương trình $\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$ (2) có thể giải cách khác như sau:

$(2)\Leftrightarrow \frac{1-\cos x}{2}=\sin x+2 \Leftrightarrow 2\sin x+\cos x=-3$, phương trình này vô nghiệm do $2^2+1^2<(-3)^2$.

Câu 71: ***Phương pháp đánh giá***

Với phương trình $3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2=7\ (*)$ thì:

A. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 1 nghiệm.

B. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 2 nghiệm

C. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 3 nghiệm.

D. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 4nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $3\cos 4x\le 3$

$(\cos 2x-\sin x)^2=|\cos 2x-\sin x|^2\le(|\cos 2x|+|\sin x|)^2\le 2^2$

$\Rightarrow(\cos 2x-\sin x)^2\le 4\Rightarrow 3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2\le 7$

Phương trình (*) xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\cos 4x=3\\(\cos 2x-\sin x)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\\cos 2x-\sin x=2(1)\end{cases}\\\begin{cases}\cos 4x=1\\\cos 2x-\sin x=-2(2)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\\cos 2x=1\ \text{(I)}\\\sin x=-1\end{cases}\\\begin{cases}\cos 4x=1\\\cos 2x=-1\ \text{(II)}\\\sin x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

+ Giải (I): $\begin{cases}2\cos^2 2x-1=1\\\cos 2x=1\\\sin x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2 2x=1\\\cos 2x=1\\\sin x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=1\\\sin x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2\sin^2 x=1\\\sin x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=0\\\sin x=1\end{cases}$

(vô nghiệm)

+ Giải (II):

$\begin{cases}\cos^2 2x=1\\\cos 2x=-1\\\sin x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=-1\\\sin x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2\sin^2 x=-1\\\sin x=1\end{cases}\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có 1 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

Chú ý: Có thể giải phương trình này bằng cách đưa về phương trình bậc 4 với $\sin x$ sẽ tự nhiên hơn. Tuy nhiên với ví dụ này tôi muốn minh họa thêm cho các bạn một phương pháp giải khác để linh hoạt khi làm bài.

Câu 72: ***Phương pháp hàm số***

Phương trình $\sqrt{\sin^2 x+1}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{\cos^2 x+1}$ (*) có tổng các nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{\sin^2 x+1}=-\text{sinx}+\cos x+\sqrt{\cos^2 x+1}$

$\Leftrightarrow\sqrt{\sin^2 x+1}+\text{sinx}=\cos x+\sqrt{\cos^2 x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$ trên $(0;1)$.

Với $\forall t_1,t_2\in(0;1)$ *va* $t_1\ne t_2$ ta xét biểu thức

$$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=\frac{\sqrt{t_1^{\,2}+1}+t_1-\sqrt{t_2^{\,2}+1}-t_2}{t_1-t_2}=\frac{t_1^{\,2}-t_2^{\,2}}{\left(\sqrt{t_1^{\,2}+1}+\sqrt{t_2^{\,2}+1}\right)(t_1-t_2)}+\frac{t_1-t_2}{t_1-t_2}=$$

$$=\frac{t_1^{\,2}-t_2^{\,2}}{\left(\sqrt{t_1^{\,2}+1}+\sqrt{t_2^{\,2}+1}\right)(t_1-t_2)}+1>0.$$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;1)$, Suy ra phương trình (1) tuuongw đương

$f(\text{sinx})=f(\cos x)\Leftrightarrow\text{sinx}=\cos x\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình (*) có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $\frac{\pi}{4}$.

Một số phương trình lượng giác đưa về dạng tích

Câu 73: Phương trình $1+\cos x+\sin x+\cos 2x+\sin 2x=0$ có các nghiệm dạng $x_1=a+k2\pi,x_2=b+k2\pi,x_3=c+k2\pi,x_4=d+k2\pi$. Với $0<a,b,c,d<2\pi$ thì $a+b+c+d$ là:

A. 0. **B.** $\frac{7\pi}{2}$. **C.** $\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos x+\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)^2+(\cos x+\sin x)+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x+1+\cos x-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\2\cos x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\\cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Nghiệm trên biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta viết lại các nghiệm phương trình là

$x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$ v $x=\frac{7\pi}{4}+k2\pi$ v $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ v $x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi$ $\Rightarrow a+b+c+d=\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=\frac{9\pi}{2}$

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình $\cos^3 2x-\cos^2 2x-a\sin^2 x=0$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^3 2x-\cos^2 2x-a\frac{1-\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x-2\cos^2 2x+a\cos 2x-a=0 \Leftrightarrow (\cos 2x-1)(2\cos^2 2x-a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1(1)\\ \cos^2 2x=-\frac{a}{2}(2)\end{array}\right.$

-Giải (1) $\Rightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi (k\in\mathbb{Z})$, các nghiệm này không thuộc $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$.

-Giải (2) có $x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow 2x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow \frac{1}{2}<\cos 2x<1 \Rightarrow \frac{1}{4}<\cos^2 2x<1$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{-a}{2}<1 \Leftrightarrow -2<a<-\frac{1}{2}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của a là -1.

Câu 75: Phương trình $\sin 2x+2\cos x=\cos 2x-\sin x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ **B.** $\sin 2x=0$ **C.** $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ **D.** $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

pt $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x=-2\sin x^2-\sin x+1$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x+2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x+\sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Câu 76: Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{k}{\pi^2}$ đúng với $\forall x\in(0;\frac{\pi}{2})$. Khi đó giá trị của k là

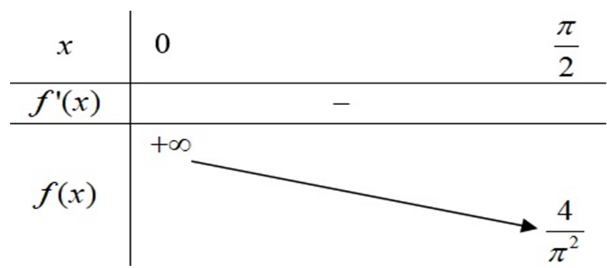
A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Hướng dẫn giải:

$\frac{1}{\sin^2 x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{k}{\pi^2}\Leftrightarrow k<\pi^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)\Leftrightarrow k<\pi^2.f(x)$ với $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}+1$.

Xét hàm số $f(x)$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, ta có $f'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}<0\ \forall x\in\left(o;\frac{\pi}{2}\right)$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra $k < \pi^2.f(x)\ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow k \le 4$.

Câu 77: Có bao nhiêu giá trị của α trong $[0;2\pi]$ để ba phần tử của $S = \{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ trùng với ba phần tử của $T = \{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

$$\Leftrightarrow (2\cos\alpha + 1)\sin 2\alpha = (2\cos\alpha + 1)\cos 2\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = -\frac{1}{2}\\ \tan 2\alpha = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\end{array}\right..$$

Khi $\sin 2\alpha = \cos 2\alpha$ thì ta có thể chia các trường hợp sau:

+) $\begin{cases}\sin\alpha = \cos\alpha\\ \sin 3\alpha = \cos 3\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\end{cases}$ (Loại)

+) $\begin{cases}\sin\alpha = \cos 3\alpha \Rightarrow 3\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + k2\pi\\ \sin 3\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\end{cases}.$

Chọn D.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x+m\cot x=8$ có nghiệm.

A. $m>16$. **B.** $m<16$. **C.** $m\ge 16$. **D.** $m\le 16$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\tan x+m\cot x=8\Leftrightarrow \tan x+\dfrac{m}{\tan x}=8\Leftrightarrow \tan^2 x-8\tan x+m=0$.

Để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'=(-4)^2-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 16$.

Chọn D.

Câu 79: Biến đổi phương trình $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$ về dạng $\sin(ax+b)=\sin(cx+d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $b+d$.

A. $b+d=\dfrac{\pi}{12}$. **B.** $b+d=\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $b+d=-\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $b+d=\dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\dfrac{1}{2}\cos 3x=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\Leftrightarrow \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Suy ra $b+d=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn D.

Câu 80: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2m$ vô nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2<(2m)^2\Leftrightarrow 4m^2-4>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>1\end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-10;-9;-8;\ldots;-2;2;\ldots;8;9;10\}\longrightarrow$ có 18 giá trị.

Chọn C.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(m^2+1\right)$ vô nghiệm.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in[-1;1]$. **C.** $m\in(-\infty;+\infty)$

D. $m\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+1^2<\left[\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow m^4+2m^2>0\Leftrightarrow m^2\left(m^2+2\right)>0\Leftrightarrow m^2>0\Leftrightarrow m\ne 0$.

Chọn D.

Câu 82: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $(m+1)\sin x-m\cos x=1-m$ có nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \ge (1-m)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4m \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -4 \end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-10;-9;-8;...;-4;0;1;2;...;8;9;10\} \longrightarrow$ có 18 giá trị.

Chọn C.

Câu 83: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm.

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2019. **D.** 2020.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow (m+1)\dfrac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x + (1-m)\cos 2x = -m-1.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (-2)^2 + (1-m)^2 \ge (-m-1)^2 \Leftrightarrow 4m \le 4 \Leftrightarrow m \le 1$

$\xrightarrow[m\in[-2018;2018]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2018;-2017;...;0;1\} \longrightarrow$ có 2020 giá trị.

Chọn D.

Câu 84: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình $\cos^3 2x - \cos^2 2x - a\sin^2 x = 0$ có nghiệm $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^3 2x - \cos^2 2x - a\dfrac{1-\cos 2x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x - 2\cos^2 2x + a\cos 2x - a = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(2\cos^2 2x - a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 (1) \\ \cos^2 2x = -\dfrac{a}{2} (2) \end{array}\right.$

-Giải (1) $\Rightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, các nghiệm này không thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

-Giải (2) có $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0;\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \cos 2x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \cos^2 2x < 1$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{-a}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < a < -\dfrac{1}{2}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của a là -1.

Câu 85: Giá trị của m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là $m \in [a;b)$ thì $a+b$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = m \end{array}\right.$

$x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x\in[-1;0)\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}$ không có nghiệm thỏa mãn $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -1\le m<0\Rightarrow a+b=1$.

Câu 86: Phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x\cos x-m+2=0$ có nghiệm khi $m\in[a;b]$ thì tích $a.b$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$.   **B.** $\frac{9}{2}$.   **C.** $\frac{75}{16}$.   **D.** $\frac{15}{4}$.

Hướng dẫn giải

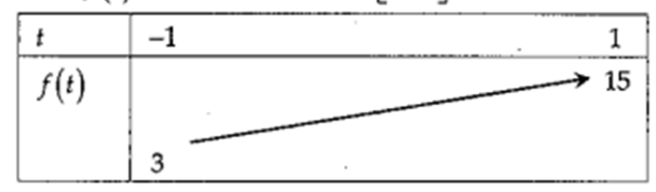
Chọn C.

$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x.\cos x-m+2=0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+\frac{3}{2}\sin 2x-m+2=0$ (*)

$\Leftrightarrow 4m=-3\sin^2 2x+6\sin 2x+12$

Đặt $t=\sin 2x, t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=-3t^2+6t+12$ trên $[-1;1]$.



t	-1	1
$f(t)$	3	15

Suy ra (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 3\le 4m\le 15\Leftrightarrow \frac{3}{4}\le m\le\frac{15}{4}$.

Vậy $ab=\frac{75}{16}$.

Câu 87: phương trình $m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là:

A. 9.   **B.** 8.   **C.** 10.   **D.** 7

Hướng dẫn giải

Chọn A

+) Điều kiện: $\cos x\ne 0$

Khi đó, phương trình tương đương với

$m\tan x+m+1=\frac{m}{\cos^2 x}\Leftrightarrow m\tan x+m+1=m\left(1+\tan^2 x\right)\Leftrightarrow m\tan^2 x-m\tan x-1=0$

Nhận xét: Với m = 0 thì phương trình vô nghiệm.

Nên phương trình có nghiệm kh và chỉ khi $\Delta\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 0\\ m\le -4\end{array}\right.$

Vì $0<m<10$ nên $m\in\{1,2,...9\}$. Vậy có 9 giá trị.

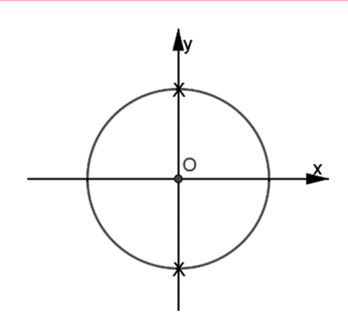
Câu 88: Phương trình $\sin 4x=\tan x$ có nghiệm dạng $x=k\pi$ và $x=\pm m\arccos n+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ thì $m+n$ bằng:

A. $m+n=\frac{\sqrt{3}}{2}$.   **B.** $m+n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.   **C.** $m+n=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.   **D.** $m+n=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$



Phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x.\cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x.\cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x.\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 x.\cos 2x - 1\right)\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} (VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

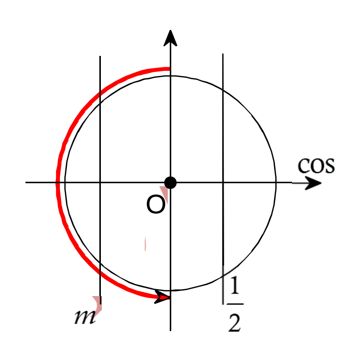
$\Rightarrow m + n = \frac{1}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 89: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - \left(2m+1\right)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

A. $-1 \leq m \leq 0$. **B.** $-1 \leq m < 0$. **C.** $-1 < m < 0$. **D.** $-1 \leq m < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \left(2m+1\right)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{array}\right.$.



Nhận thấy phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ (Hình vẽ). Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos x = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.

Chọn B.

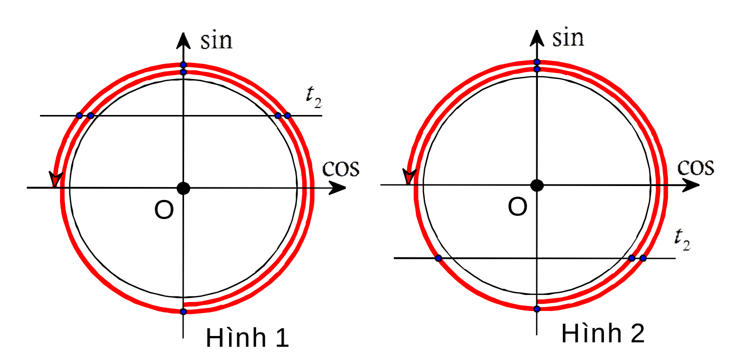
Câu 90: Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x - \left(5m+1\right)\sin x + 2m^2 + 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m=-3$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m_0\in\left(\frac{3}{5};\frac{7}{10}\right]$. **D.** $m_0\in\left(-\frac{3}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sin x$ $(-1\le t\le 1)$.

Phương trình trở thành $2t^2-(5m+1)+2m^2+2m=0.$ $(*)$



Yêu cầu bài toán tương đương với:

- **TH1:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1=-1$ (có một nghiệm x) và một nghiệm $0<t_2<1$ (có bốn nghiệm x) (Hình 1).

✔ Do $t_1=-1\longrightarrow t_2=-\frac{c}{a}=-m^2-m$.

✔ Thay $t_1=-1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m=-3\longrightarrow t_2=-6\notin(0;1)(\text{loại}) \\ m=-\frac{1}{2}\longrightarrow t_2=\frac{1}{4}\in(0;1)(\text{thỏa}) \end{array}\right.$.

- **TH2:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1=1$ (có hai nghiệm x) và một nghiệm $-1<t_2\le 0$ (có ba nghiệm x) (Hình 2).

✔ Do $t_1=1\longrightarrow t_2=\frac{c}{a}=m^2+m$.

✔ Thay $t_1=1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m=1\longrightarrow t_2=2\notin(-1;0](\text{loại}) \\ m=\frac{1}{2}\longrightarrow t_2=\frac{3}{4}\notin(-1;0](\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy $m=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m=-\frac{1}{2}\in\left(-\frac{3}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

Chọn D.

Chú ý: Ta có thể sử dụng cách tìm nghiệm t theo m rồi cho t thỏa mãn ycbt

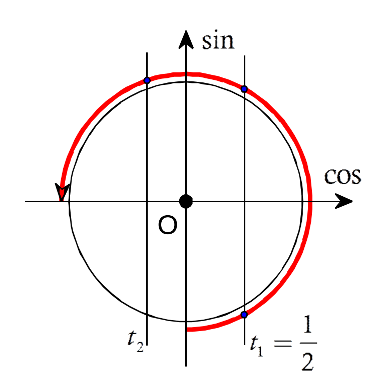
Câu 91: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\cos^2 3x+(3-2m)\cos 3x+m-2=0$ có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $-1\le m\le 1$. **B.** $1<m\le 2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\cos x$ $(-1\le t\le 1)$. Phương trình trở thành $2t^2+(3-2m)t+m-2=0$.

Ta có $\Delta=(2m-5)^2$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1}{2} \\ t_2=m-2 \end{array}\right.$.



Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1 = \frac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$. Do đó yêu cầu bài toán $-1 < t_2 \le 0 \Leftrightarrow -1 < m-2 \le 0 \Leftrightarrow 1 < m \le 2$.

Chọn B.

Cách 2. Yêu cầu bài toán tương đươn với phương trình $2t^2 + (3-2m)t + m - 2 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $-1 < t_2 \le 0 < t_1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P \le 0 \\ a.f(1) > 0 \\ a.f(-1) > 0 \end{cases}$.

Chú ý: Ta có thể sử dụng cách tìm nghiệm t theo m rồi cho t thỏa mãn ycbt

Câu 92: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x\cos x - \sin x - \cos x + m = 0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$ $\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right) \longrightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình trở thành $\frac{t^2-1}{2} - t + m = 0 \Leftrightarrow -2m = t^2 - 2t - 1 \Leftrightarrow (t-1)^2 = -2m + 2$.

Do $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \longrightarrow -\sqrt{2} - 1 \le t - 1 \le \sqrt{2} - 1 \longrightarrow 0 \le (t-1)^2 \le 3 + 2\sqrt{2}$.

Vậy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \le -2m + 2 \le 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \le m \le 1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-1;0;1\}$.

Chọn C.

Câu 93: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - m = 0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - m = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \sin x - cosx - m = 0$

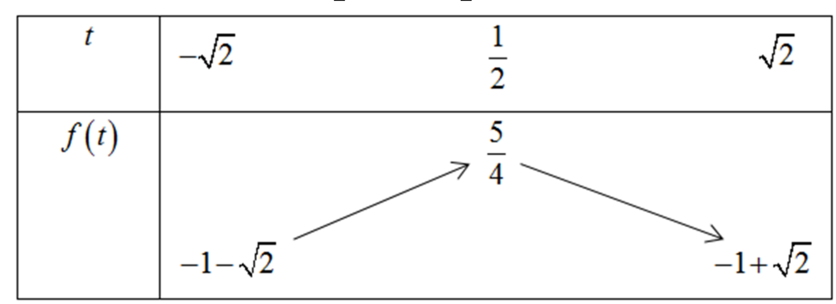
Đặt $t = \sin x - cosx = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right], \forall x \in \mathbb{R}$

$t^2 = 1 - 2\sin x cosx \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Ta đi tìm m để phương trình $1-t^2+t-m=0$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow 1-t^2+t=m$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét $f\left(t\right)=1-t^2+t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$



Suy ra $-1-\sqrt{2}\le f\left(t\right)\le\frac{5}{4},\forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m=f\left(t\right)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow m\in\left[-1-\sqrt{2};\frac{5}{4}\right]$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-2;-1;0;1\right\}$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn.

Câu 94: Phương trình $cos^3x+\sin^3x=cos2x$ có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{5\pi}{4}$. **C.** $\frac{7\pi}{2}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\cos^3x+\sin^3x=\cos2x\Leftrightarrow\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2x-\cos x\sin x+\sin^2x\right)=\cos^2x-\sin^2x$

$\Leftrightarrow\left(\cos x+\sin x\right)\left(1-\cos x\sin x\right)=\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x+\sin x=0 & (1)\\ 1-\cos x\sin x=\cos x-\sin x & (2)\end{array}\right.$$

Giải $\left(1\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Giải $\left(2\right):1-\cos x\sin x+\sin x+\cos x=0$

Đặt $t=\sin x-cosx=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right],\forall x\in\mathbb{R}$

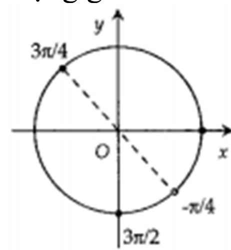
$t^2=1-2\sin xcosx\Rightarrow\sin2x=1-t^2$

$\left(2\right)\Rightarrow1-\frac{1-t^2}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0\Leftrightarrow t=-1$

$$\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm này trên vòng tròn lượng giác



ta suy ra nghiệm lớn nhất là $x_1=-\frac{\pi}{4}$ và nghiệm bé nhất là $x_2=\frac{3\pi}{4}$

Vậy $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$.

Câu 95: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $11\sin^2 x+(m-2)\sin 2x+3\cos^2 x=2$ có nghiệm?

A. 16. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow 9\sin^2 x+(m-2)\sin 2x+\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 9.\frac{1-\cos 2x}{2}+(m-2)\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=0 \Leftrightarrow (m-2)\sin 2x-4\cos 2x=-5.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m-2)^2+16\ge 25 \Leftrightarrow (m-2)^2\ge 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 5 \\ m\le -1 \end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-10;-9;...;-1;5;6;...;10\} \longrightarrow$ có 16 giá trị nguyên.

Chọn A.

Câu 96: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc để phương trình $\sin^2 x-2(m-1)\sin x\cos x-(m-1)\cos^2 x=m$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow (1-m)\sin^2 x-2(m-1)\sin x\cos x-(2m-1)\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow (1-m).\frac{1-\cos 2x}{2}-(m-1)\sin 2x-(2m-1).\frac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2(m-1)\sin 2x+m\cos 2x=2-3m.$

Phương trình có nghiệm $4(m-1)^2+m^2\ge (2-3m)^2 \Leftrightarrow 4m^2-4m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1\} \longrightarrow$ có 2 giá trị nguyên.

Chọn A.

Câu 97: Tìm điều kiện để phương trình $a\sin^2 x+a\sin x\cos x+b\cos^2 x=0$ với $a\ne 0$ có nghiệm.

A. $a\ge 4b$. **B.** $a\le -4b$. **C.** $\frac{4b}{a}\le 1$. **D.** $\left|\frac{4b}{a}\right|\le 1$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $a\tan^2 x + a\tan x + b = 0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow a(a-4b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(4b-a) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4b-a}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4b}{a} \leq 1.$

Chọn C.

Câu 98: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin^2 x + m\sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. **B.** $m < 0$, $m > \frac{4}{3}$. **C.** $0 < m < \frac{4}{3}$. **D.** $m < -\frac{4}{3}$, $m > 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2.\dfrac{1-\cos 2x}{2} + m\sin 2x = 2m \Leftrightarrow m\sin 2x - \cos 2x = 2m - 1$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 1 < (2m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{array}\right.$.

Chọn B.

Câu 99: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để phương trình $(m^2+2)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow (m^2+2).\dfrac{1+\cos 2x}{2} - 2m\sin 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m\sin 2x - (m^2+2)\cos 2x = m^2 + 4$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 16m^2 + (m^2+2)^2 \geq (m^2+4)^2 \Leftrightarrow 12m^2 \geq 12 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1$

$\xrightarrow[m \in [-3;3]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-3;-2;-1;1;2;3\} \longrightarrow$ có 6 giá trị nguyên.

Chọn C.

Câu 100: Để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x|$ có nghiệm, điều kiện thích hợp cho tham số a là:

A. $0 \leq a < \frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{8} < a < \frac{3}{8}$. **C.** $a < \frac{1}{4}$. **D.** $a \geq \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x| \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = a|\sin 2x|$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x - a|\sin 2x| = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4a|\sin 2x| - 4 = 0$

Đặt $|\sin 2x| = t\ (t \in [0;1])$. Khi đó ta có phương trình $3t^2 + 4t - 4 = 0\ (1)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm

$t \in [0;1] \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4a^2 + 12 > 0 \\ f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 4a - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}$.

Câu 101: Cho phương trình: $\sin x\cos x - \sin x - \cos x + m = 0$, trong đó m là tham số thực. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là:.

A. $-2\le m\le -\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\le m\le 1$. **C.** $1\le m\le \frac{1}{2}+\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\le m\le 1$

.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $\sin x+\cos x=t\left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$. Khi đó ta có phương trình

$\frac{t^2-1}{2}-t+m=0\Leftrightarrow t^2-2t+2m-1=0(*)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $(*)$ có nghiệm

$$t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=2-2m>0\\ -\sqrt{2}<\frac{s}{2}=1<\sqrt{2}\\ f\left(-\sqrt{2}\right)=1+2\sqrt{2}+2m\ge 0\\ f\left(\sqrt{2}\right)=1-2\sqrt{2}+2m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\ m\ge -\frac{1}{2}+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\sqrt{2}\le m\le 1.$$

Câu 102: Cho phương trình: $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-8\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-4\sin^2 4x=m$ trong đó m là tham số. Để phương trình là vô nghiệm, thì các giá trị thích hợp của m là:

A. $m<-4\ hay\ m>0$. **B.** $-\frac{3}{2}\le m\le -1$. **C.** $-2\le m\le -\frac{3}{2}$. **D.** $m<-2\ hay\ m>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có:

$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

Phương trình đã cho trở thành

$4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)-8\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-16\sin^2 2x\cos^2 2x=m$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x-16\sin^2 2x\left(1-\sin^2 2x\right)-4=m$

$\Leftrightarrow 16\sin^4 2x-12\sin^2 2x-4-m=0$

Đặt $\sin^2 2x=t\left(t\in[0;1]\right)$. Khi đó phương trình trở thành $16t^2-12t-m-4=0(*)$

$(*)$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

TH1: $\Delta'=100+16m<0\Leftrightarrow m<-\frac{25}{4}$.

TH2: $\begin{cases}\Delta'=100+16m\ge 0\\ f(0)f(1)=m(m+4)>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{25}{4}\le m<-4\\ m>0\end{array}\right.$.

Vậy các giá trị cần tìm $m<-4\ hay\ m>0$. Không có đáp án đúng.

Câu 103: Cho phương trình: $\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=2m.\tan 2x$, trong đó m là tham số. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là:

A. $m\le -\dfrac{1}{8}\ hay\ m\ge \dfrac{1}{8}$. **B.** $m<-\dfrac{1}{8}\ hay\ m>\dfrac{1}{8}$. **C.** $m\le -\dfrac{1}{2}\ hay\ m\ge \dfrac{1}{2}$. **D.** $m\le -1\ hay\ m\ge 1$

.

Hướng dẫn giải

Chọn B

ĐK: $\cos 2x\ne 0$

$\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=2m.\tan 2x \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\cos 2x}=2m\tan 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{\cos 2x}=2m\tan 2x \Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=2m\sin 2x \Leftrightarrow 3\sin^2 2x+8m\sin 2x-4=0.$

Đặt $\sin 2x=t\left(t\in(-1;1)\right)$.Khi đó phương trình trở thành: $3t^2+8mt-4=0(*)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in(-1;1)$

TH1: $(*)$ có 1 nghiệm $t\in(-1;1)\Leftrightarrow f(1)f(-1)<0\Leftrightarrow(8m-1)(-8m-1)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1}{8}\\ m<-\dfrac{1}{8}\end{array}\right.$

.

TH2: $(*)$ có 2 nghiệm $t\in(-1;1)\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=16m^2+12>0\\ f(1)=8m-1>0\\ f(-1)=-8m-1>0\\ -1<\dfrac{s}{2}=-\dfrac{4m}{3}<1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{8}\\ m<-\dfrac{1}{8}\\ -\dfrac{3}{4}<m<\dfrac{3}{4}\end{cases}\quad (VN).$

Câu 104: Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\cos 4x+\dfrac{4\tan x}{1+\tan^2 x}=m$. Để phương trình vô nghiệm, các giá trị của tham số m phải thỏa mãn điều kiện:.

A. $-\dfrac{5}{2}\le m\le 0$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $1<m\le \dfrac{3}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{5}{2}\ hay\ m>\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

ĐK: $\cos x\ne 0$.

$\dfrac{1}{2}\cos 4x+\dfrac{4\tan x}{1+\tan^2 x}=m \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos 4x+\dfrac{4\tan x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=m \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos 4x+4\sin x\cos x=m$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(1-2\sin^2 2x\right)+2\sin 2x=m \Leftrightarrow \sin^2 2x-2\sin 2x+m-\dfrac{1}{2}=0$

Đặt $\sin 2x=t\left(t\in[-1;1]\right)$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2-2t+m-\dfrac{1}{2}=0\,(*)$

Phương trình $(*)$ vô nghiệm:

TH1: $\Delta' = \frac{3}{2} - m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

TH2: $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ f(-1)f(1) = \left(m + \frac{5}{2}\right)\left(m - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -\frac{5}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{5}{2}$.

Câu 105: Để phương trình: $4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$ có nghiệm, tham số a phải thỏa điều kiện:

A. $-1 \leq a \leq 1$. **B.** $-2 \leq a \leq 2$. **C.** $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. **D.** $-3 \leq a \leq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình tương đương $2\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\frac{\pi}{2}\right] = a^2 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1\right] = a^2 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = a^2 - 2$

$\Leftrightarrow 4.\cos 2x.\sin\frac{\pi}{6} = a^2 - 2$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{a^2 - 2}{2}$

Để phương trìnhcó nghiệm thì $-1 \leq \frac{a^2 - 2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$.

Câu 106: Để phương trình $\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$ có nghiệm, tham số a phải thỏa mãn điều kiện:

A. $|a| \geq 1$. **B.** $|a| \geq 2$. **C.** $|a| \geq 3$. **D.** $|a| > 1, a \neq \pm\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện của phương trình $\cos x \neq 0, \cos 2x \neq 0, \tan^2 x \neq 1$

Phương trình tương đương $\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{a^2 - 2}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{a^2 - 2}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$\Leftrightarrow a^2 = \tan^2 x + (a^2 - 2)(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow (a^2 - 1)\tan^2 x = 2$

• Nếu $a^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow |a| \leq 1 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

• Nếu $|a| > 1: (1) \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{2}{a^2 - 1}$. Phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{a^2 - 1} \neq 1 \Leftrightarrow |a| \neq \sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $|a| > 1, a \neq \pm\sqrt{3}$

Câu 107: Tìm m để phương trình $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

A. $-1<m\le 1$. **B.** $0<m\le\frac{1}{2}$. **C.** $-1<m\le-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}<m\le 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m(1-\cos x)(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos 2x-m\cos x=m-m\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos 2x=m\end{array}\right.$

Với $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$: không có nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

Với $\cos 2x=m\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{m+1}{2}$.

Trên $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$, phương trình $\cos x=a$ có duy nhất 1 nghiệm với $a\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Do đó, YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ \frac{-1}{2}\le\sqrt{\frac{m+1}{2}}\le 1\\ \frac{-1}{2}\le-\sqrt{\frac{m+1}{2}}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ \sqrt{\frac{m+1}{2}}\le\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ m\le-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow-1<m\le-\frac{1}{2}$.

Câu 108: Tìm m để phương trình $\cos 2x-(2m-1)\cos x-m+1=0$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $-1<m\le 0$. **B.** $0\le m<1$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $-1<m<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$\cos 2x-(2m-1)\cos x-m+1=0$ $(1)\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m-1)\cos x-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}.\\ \cos x=m\end{array}\right.$

Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $0\le\cos x\le 1$. Do đó $\cos x=-\frac{1}{2}$ (loại).

Vậy để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi

$0\le\cos x<1\Leftrightarrow 0\le m<1$.

Câu 109: Tìm m để phương trình $2\sin x+m\cos x=1-m$ có nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $-3\le m\le 1$. **B.** $-2\le m\le 6$. **C.** $1\le m\le 3$ **D.** $-1\le m\le 3$.

Hướng dẫn giải

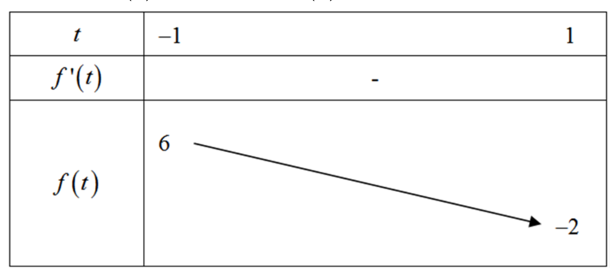
Chọn D

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$, để $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $t\in[-1;1]$.

pt $\Leftrightarrow 2\frac{2t}{1+t^2}+m\frac{1-t^2}{1+t^2}=1-m \Leftrightarrow 4t+m-mt^2=1-m+(1-m)t^2 \Leftrightarrow t^2-4t+1=2m$

Vậy để yêu cầu bài toán xảy ra thì $f(t)=t^2-4t+1$ trên $[-1;1]$

Ta có $f'(t)=2t-4;\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$



Vậy để yêu cầu bài toán xảy ra thì $-2\le 2m\le 6 \Leftrightarrow -1\le m\le 3$

Câu 110: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m+\sin(m+\sin 3x)=\sin(3\sin x)+4\sin^3 x$ có nghiệm thực?

A. 9 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 8

Hướng dẫn giải

Ta có $m+\sin 3x+\sin(m+\sin 3x)=\sin(3\sin x)+4\sin^3 x+\sin 3x$

$\Leftrightarrow (m+\sin 3x)+\sin(m+\sin 3x)=(3\sin x)+\sin(3\sin x) \Rightarrow m+\sin 3x=3\sin x \Rightarrow \boxed{m=4\sin^3 x}$

. **Chọn A.**

Câu 111: Cho phương trình: $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$. Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ khi:

A. $m>-1.$ **B.** $m\ge -1.$ **C.** $-1\le m\le 1.$ **D.** $-1<m\le -\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)+m(\cos x+1)(\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\ \ (1)\\ \cos 2x=m\ \ (2)\end{array}\right.$

Vì $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow -\frac{1}{2}\le \cos x\le 1$ nên (1) không có nghiệm trên $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$. Xét

$f(x)=\cos 2x,\ x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $f'(x)=-2\sin 2x,\ \ f'(x)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$. Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$	0 −	0	+
$f(x)$	1 ↘	-1	↗ $-\frac{1}{2}$

Yêu cầu của bài toán trở thành tìm các giá trị thực của tham số m để (2) có hai nghiệm thực phân biệt trên $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$. Từ bảng biến thiên ta thấy (2) có hai nghiệm thực phân biệt trên $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ khi và chỉ khi $-1<m\le -\frac{1}{2}$. Từ đó ta chọn được đáp án đúng là **D.**

Câu 112: Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}\le m+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. $m\ge\frac{3\sqrt{5}}{4}$ **B.** $m\ge\frac{3\sqrt{5}+9}{4}$ **C.** $m\ge\frac{\sqrt{65}-9}{2}$ **D.** $m\ge\frac{\sqrt{65}-9}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y=\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+4\cos^2 x+1}=\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+2\cos 2x+3}$.

Và $\sin 2x+2\cos 2x+3>0;\ \forall x\in\mathbb{R}$. xét phương trình $y=\frac{3\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+2\cos 2x+3}\Leftrightarrow$

$(\sin 2x+2\cos 2x+3)y=3\sin 2x+\cos 2x\Leftrightarrow(y-3)\sin 2x+(2y-1)\cos 2x=-3y$

Phương trình trên có nghiệm nên $(y-3)^2+(2y-1)^2\ge(-3y)^2\Leftrightarrow 5y^2-10y+10\ge 9y^2$

$\Leftrightarrow -4y^2-10y+10\ge 0\Leftrightarrow\frac{-5-\sqrt{65}}{4}\le y\le\frac{-5+\sqrt{65}}{4}$. Suy ra giá trị lớn nhất của y là $\frac{-5+\sqrt{65}}{4}$. **Chọn D.**

Câu 113: Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x+1)(4\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ là:

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải

Ta có: $(\cos x+1)(4\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m\cos x)=m(1-\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m\cos x)=m(1+\cos x)(1-\cos x)$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m\cos x-m(1-\cos x))=0$

$\Leftrightarrow(\cos x+1)(4.\cos 2x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+1=0\\4\cos 2x-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\\cos 2x=\frac{m}{4}\end{array}\right.$.

Chọn C.

Câu 114: Gọi a,b là các số nguyên thỏa mãn $(1+\tan 1^0)(1+\tan 2^0)...(1+\tan 43^0)=2^a.(1+\tan b^0)$ đồng thời $a,b\in[0;90]$. Tính $P=a+b$?

A. 22 **B.** 46 **C.** 27 **D.** 44

Hướng dẫn giải

Vì $1+\tan x=1+\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{2}\left(\frac{\sin\left(x+45^0\right)}{\cos x}\right)$.

Do đó $P=\left(\sqrt{2}\right)^{43}.\dfrac{\sin 46^0\sin 47^0...\sin 88^0}{\cos 1^0\cos 2^0...\cos 43^0}=\left(\sqrt{2}\right)^{43}.\dfrac{\sin 46^0}{\cos 1^0}=2^{21}.\left(1+\tan 1^0\right)$.

Chọn A.

Câu 115: Tìm m để phương trình $\left(m+1\right)\cos x+\left(m-1\right)\sin x=2m+3$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{\pi}{3}$.

A. $m=2+\sqrt{3}$ **B.** $m=2-\sqrt{3}$ **C.** $m=2\pm\sqrt{3}$ **D.** Không tồn tại m

Hướng dẫn giải

Phương trình có nghiệm $\left(m+1\right)^2+\left(m-1\right)^2\ge\left(2m+3\right)^2\Leftrightarrow\dfrac{-6-\sqrt{22}}{2}\le m\le\dfrac{-6+\sqrt{22}}{2}$ (*)

PT $\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\cos x+\dfrac{m-1}{\sqrt{2m^2+2}}\sin x=\dfrac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$

$\Leftrightarrow\cos\left(x+\alpha\right)=\cos\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\beta+\alpha+k_1 2\pi\\x=\beta-\alpha+k_2 2\pi\end{array}\right.$ với $\cos\alpha=\dfrac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}};\cos\beta=\dfrac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$

□ Nếu $x_1;x_2$ cùng thuộc một họ nghiệm $\Rightarrow x_1-x_2=k2\pi$ (loại)

□ Nếu $x_1;x_2$ cùng thuộc hai họ nghiệm $\Rightarrow x_1=\beta+\alpha+k_1 2\pi;x_2=\beta-\alpha+k_2 2\pi$

Do đó $\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left|2\alpha+\left(k_1-k_2\right)2\pi\right|=\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow\cos\left|2\alpha+\left(k_1-k_2\right)2\pi\right|=\cos\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha-1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=2\left(\dfrac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\right)^2-1\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}=\dfrac{\left(m+1\right)^2}{2m^2+2}$

$\Leftrightarrow m^2-4m+1=0\Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{3}$ (không thỏa mãn $(*)$)

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Câu 116: Các giá trị của $m\in\left[a;b\right]$ để phương trình $\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5$ có nghiệm thì:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=12$. **C.** $a.b=-8$. **D.** $a.b=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

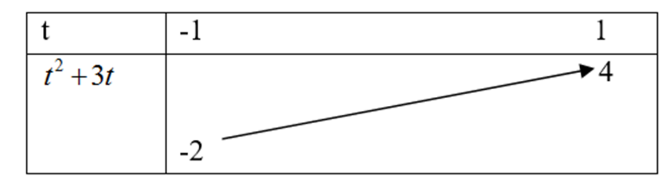
$\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5(*)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+1-\cos^2 x+3\cos x-m-5=0$

$\Leftrightarrow\cos^2 x+3\cos x=m+5$

Đặt $\cos x=t\in\left[-1;1\right]$, phương trình $\Leftrightarrow t^2+3t=m+5$

Bảng biến thiên:



t	-1	1
t^2+3t	-2 ↗	4

=> Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2\le m+5\le 4$

$\Leftrightarrow -7\le m\le -1$. Vậy a + b = -8

Câu 117: Cho phương trình $m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là:

A. 8.   **B.** 9.   **C.** 10.   **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}(*)$

Điều kiện: $\cos x\neq 0$

$(*)\Leftrightarrow m\sin x\cos x+(m+1)\cos^2 x=m$

$\Leftrightarrow \frac{m}{2}\sin 2x+\frac{m+1}{2}(1+\cos 2x)=m$

$\Leftrightarrow m\sin 2x+(m+1)\cos 2x=m-1(1)$

+ Từ m = 0 $(*)\Leftrightarrow \cos x=0$ loại do điều kiện $\Rightarrow m=0$ phương trình (*) vô nghiệm.

+ Với $m\neq 0$

=> (*) có nghiệm khi (1)

$\Leftrightarrow m^2+(m+1)^2\geq (m-1)^2$

$\Leftrightarrow m^2+4m\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -4 \\ m\geq 0\end{array}\right.$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 118: Phương trình $\cos 2x+(2m+1)\sin x-m-1=0$ có nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ khi tất cả các giá trị thỏa mãn:

A. $m\in\varnothing$.   **B.** $m\in\mathbb{R}$.   **C.** $m\in[-1;1]$.   **D.** $m\in(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\cos 2x+(2m+1)\sin-m-1=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+2m\sin x+\sin x-m-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(m-\sin x)-(m-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-m)(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2}(1) \\ \sin x=m(2)\end{array}\right.$

Giải (1): $\sin x=\frac{1}{2}$ luôn có 2 nghiệm $\in\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$\Rightarrow \forall m$ phương trình có nghiệm.

Câu 119: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$ có nghiệm?

A. 2000.   **B.** 2001.   **C.** 2010.   **D.** 2011.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$

$\Leftrightarrow 3\left(1+\cot^2 x\right)+3\tan^2 x+\tan x+\cot x+3-m=0$ Đặt

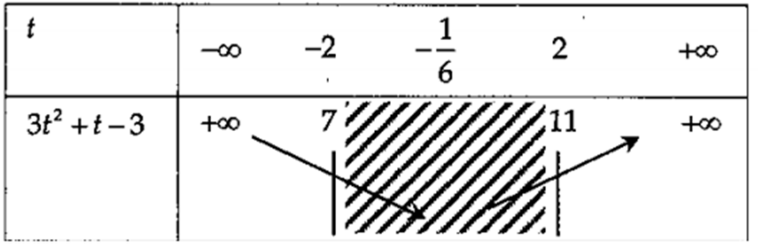
$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+\tan x+\cot x+3-m=0$

$t=\tan x+\cot x \Rightarrow t^2-2=\tan^2 x+\cot^2 x$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 2 \\ t\le -2 \end{array}\right.$ => Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $3\left(t^2-2\right)+t+3-m=0$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right) \Leftrightarrow m=3t^2+t-3$

có nghiệm $t\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$

Bảng biến thiên:



=> Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge 7$

Vậy có 2011 giá trị của m nhỏ hơn 2018

+ Với $\cos x=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x=2\sin x\cos x=0 \\ \cos 2x=2\cos^2 x-1=-1 \end{cases}$ thì $(1)\Rightarrow -m-1=m-1 \Leftrightarrow m=0$